2018-6-3

MEG順方向問題

導電体モデルを用いたセンサーリードフィールドの推定

株式会社シグナルアナリシス
関原　謙介

Adaptive Spatial Filters for Electromagnetic Brain Imagingの第13,7節を解説.

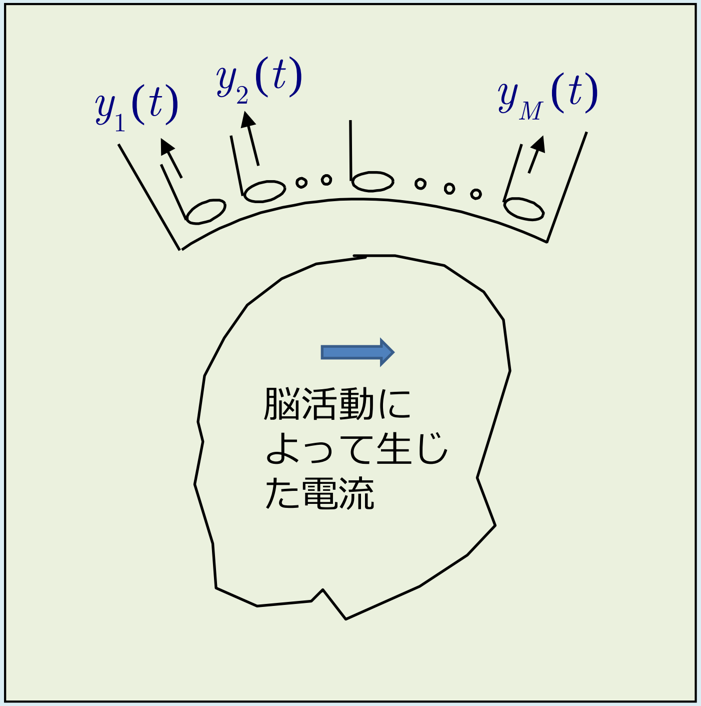
多チャンネルセンサーデータ

データベクトル

計測データをセンサー数の要素を持つ列ベクトルで表す

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_M(t) \end{bmatrix}$$

M：センサー数

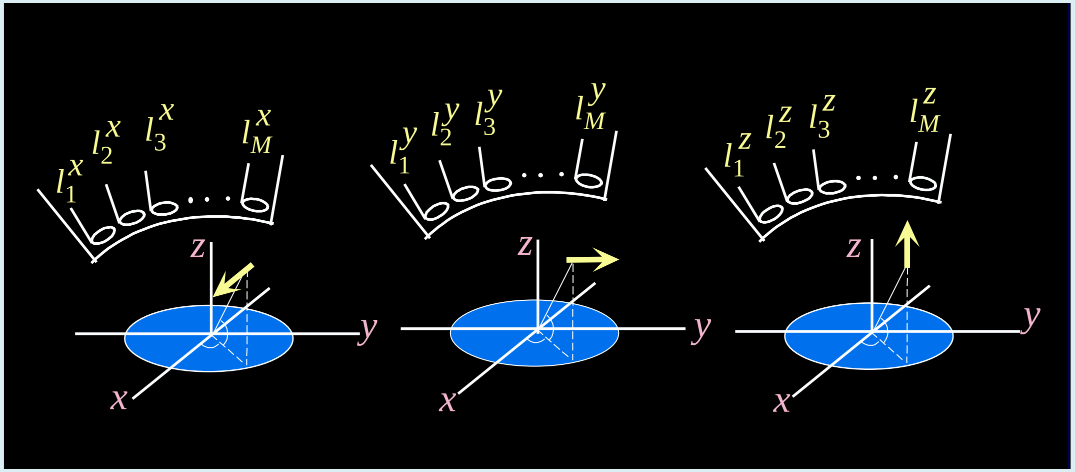


いかにして，計測データのベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ と，脳活動（厳密には脳活動によって生じた電流と）の関連を表現するか？

ソースと呼ぶ

ソース電流と計測データの関係を導く

センサーリードフィールドの導入



位置 $\boldsymbol{r}$ に x 方向の向きを向いた単位強度の電流がある場合のセンサー出力：$l_1^x, l_2^x, \ldots, l_M^x$

位置 $\boldsymbol{r}$ に y 方向の向きを向いた単位強度の電流がある場合のセンサー出力：$l_1^y, l_2^y, \ldots, l_M^y$

位置 $\boldsymbol{r}$ に z 方向の向きを向いた単位強度の電流がある場合のセンサー出力：$l_1^z, l_2^z, \ldots, l_M^z$

センサー出力＝センサー位置での磁場ベクトルとセンサーの法線方向ベクトルの内積

リードフィールド行列

以下の（$M\times 3$）の行列はリードフィールド行列と呼ばれ，センサーアレイの位置 $\boldsymbol{r}$ における感度を表す．

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} l_1^x(\boldsymbol{r}) & l_1^y(\boldsymbol{r}) & l_1^z(\boldsymbol{r}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_j^x(\boldsymbol{r}) & l_j^y(\boldsymbol{r}) & l_j^z(\boldsymbol{r}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_M^x(\boldsymbol{r}) & l_M^y(\boldsymbol{r}) & l_M^z(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$$

j番目のセンサーの位置 $\boldsymbol{r}$ における感度

センサーアレイの位置 $\boldsymbol{r}$ における感度

センサーアレイの位置 $\boldsymbol{r}$ における y 方向に向いたソースに対する感度

センサー・リードフィールドを用いてセンサー出力とソース電流の関係を表す

位置 $\mathbf{r}$ に離散的なソースが1個存在する場合：

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^x(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ l_M^x(\mathbf{r}) \end{bmatrix} s_x(t) + \begin{bmatrix} l_1^y(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ l_M^y(\mathbf{r}) \end{bmatrix} s_y(t) + \begin{bmatrix} l_1^z(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ l_M^z(\mathbf{r}) \end{bmatrix} s_z(t) = \begin{bmatrix} l_1^x(\mathbf{r}) & l_1^y(\mathbf{r}) & l_1^z(\mathbf{r}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_M^x(\mathbf{r}) & l_M^y(\mathbf{r}) & l_M^z(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \\ s_z(t) \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{L}(\mathbf{r})\boldsymbol{s}(t)$$

($\mathbf{r}$ 存在する) x を向いた単位強度の電流によるセンサーアレイの応答

y を向いた単位強度の電流によるセンサーアレイの応答

z を向いた単位強度の電流によるセンサーアレイの応答

ソースが領域 Ω に連続的に分布している場合

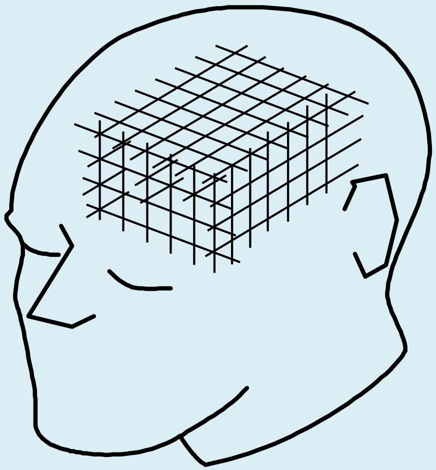
（ Ωをソーススペースと呼ぶ）

$$\boldsymbol{y} = \int_{\Omega} \boldsymbol{L}(\mathbf{r})\boldsymbol{s}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

センサー・リードフィールドを用いてセンサーデータとソースの関係を表す

ソースが領域 Ω に連続的に分布している場合

$$\boldsymbol{y} = \int_\Omega \boldsymbol{L}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$



ソースとセンサーデータの関係をボクセルを導入し近似すれば：

$$\boldsymbol{y} = \int \boldsymbol{L}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}_j)\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}_j)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}_1), & \cdots, & \boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}_N) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}_N) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}_1), & \cdots, & \boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}_N) \end{bmatrix}$ ボクセルリードフィールド行列と呼ばれ，センサー数 × 3 (ボクセル数) の行列である．

線形離散モデル

未知量 : $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$, 観測データ : $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}$ に

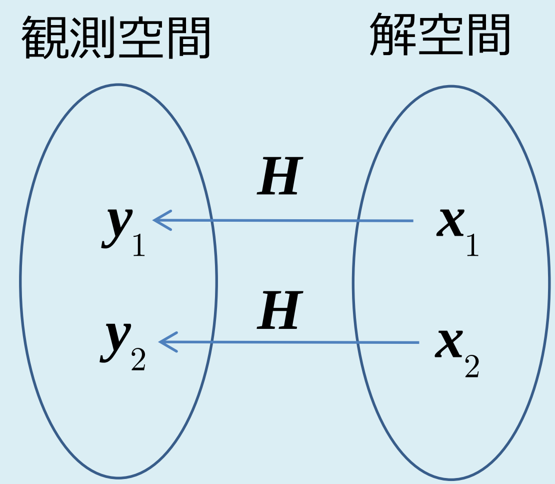
線形な関係 :

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$$

が存在する. これに加法的にノイズ $\boldsymbol{\varepsilon}$ が重畳するとして

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

を観測データのモデル(線形離散モデル)と呼ぶ.



「未知量 $\boldsymbol{x}$ が原因で観測結果$\boldsymbol{y}$を生じたと解釈することもできる. 」

原因 $\boldsymbol{x}$ を与えて結果 $\boldsymbol{y}$ を推定する $\longrightarrow$ 順（方向）問題 （forward problem)

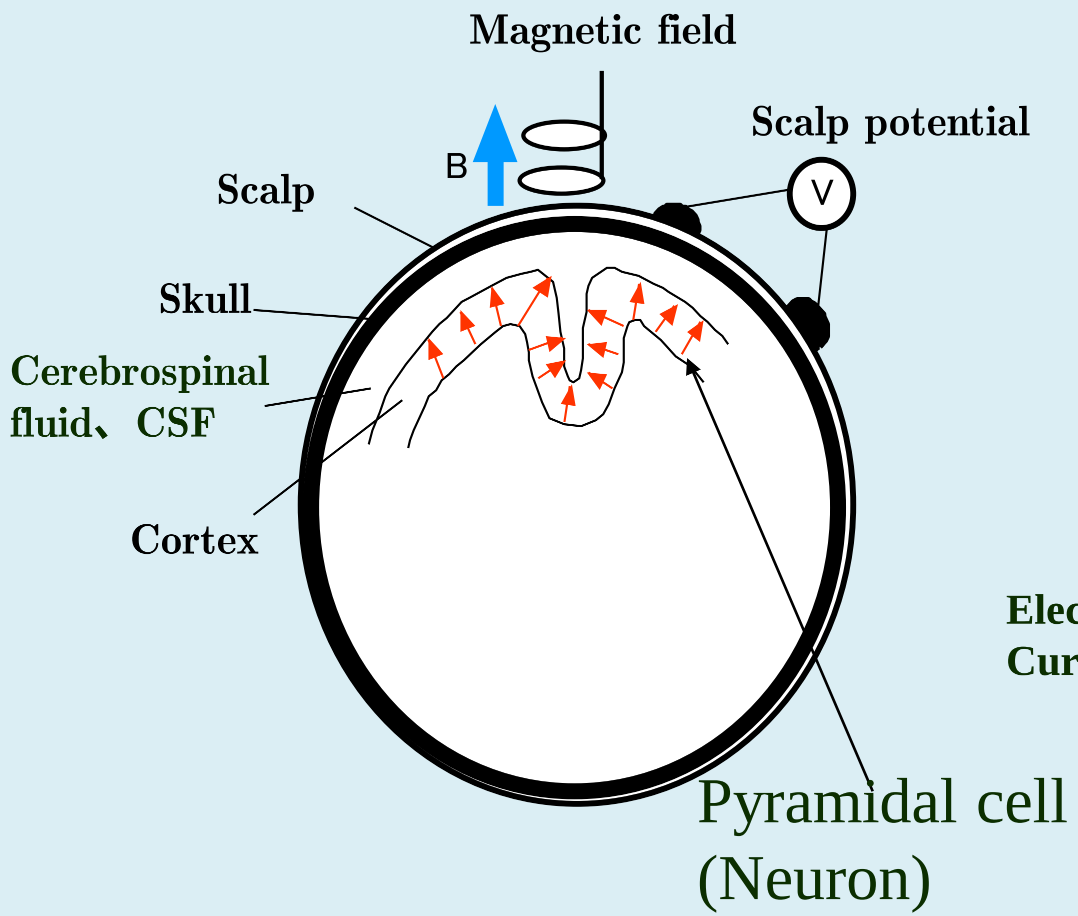
(行列$\boldsymbol{H}$ を推定する問題に等しい.)

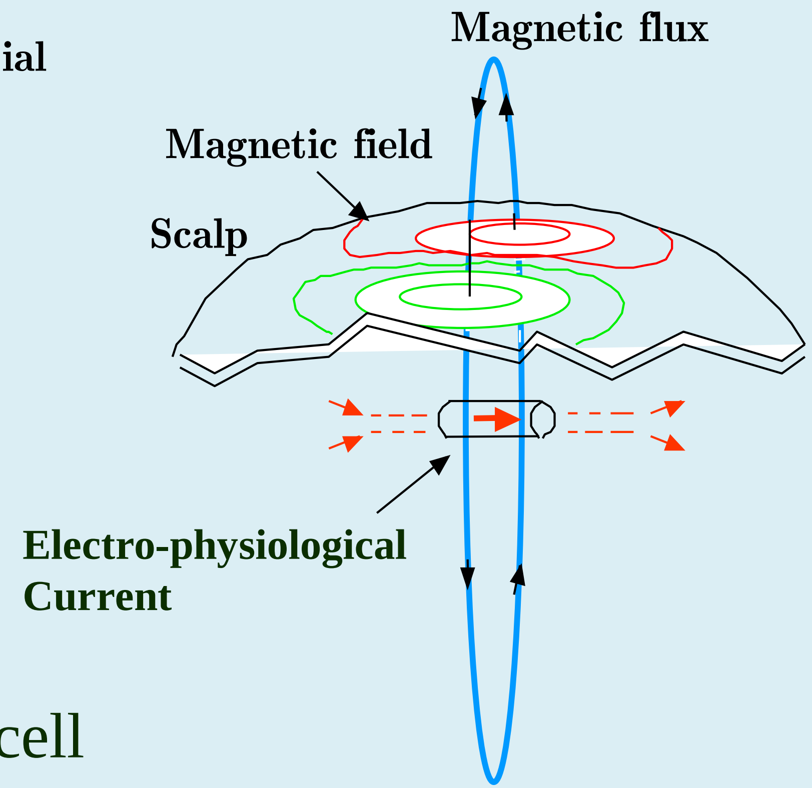
結果 $\boldsymbol{y}$ を与えて原因 $\boldsymbol{x}$ を推定する $\longrightarrow$ 逆（方向）問題 （inverse problem)

$M > N \Rightarrow$ 逆問題は優決定 (over-determined),

$M < N \Rightarrow$ 逆問題は劣決定 (under-determined)と呼ばれる.

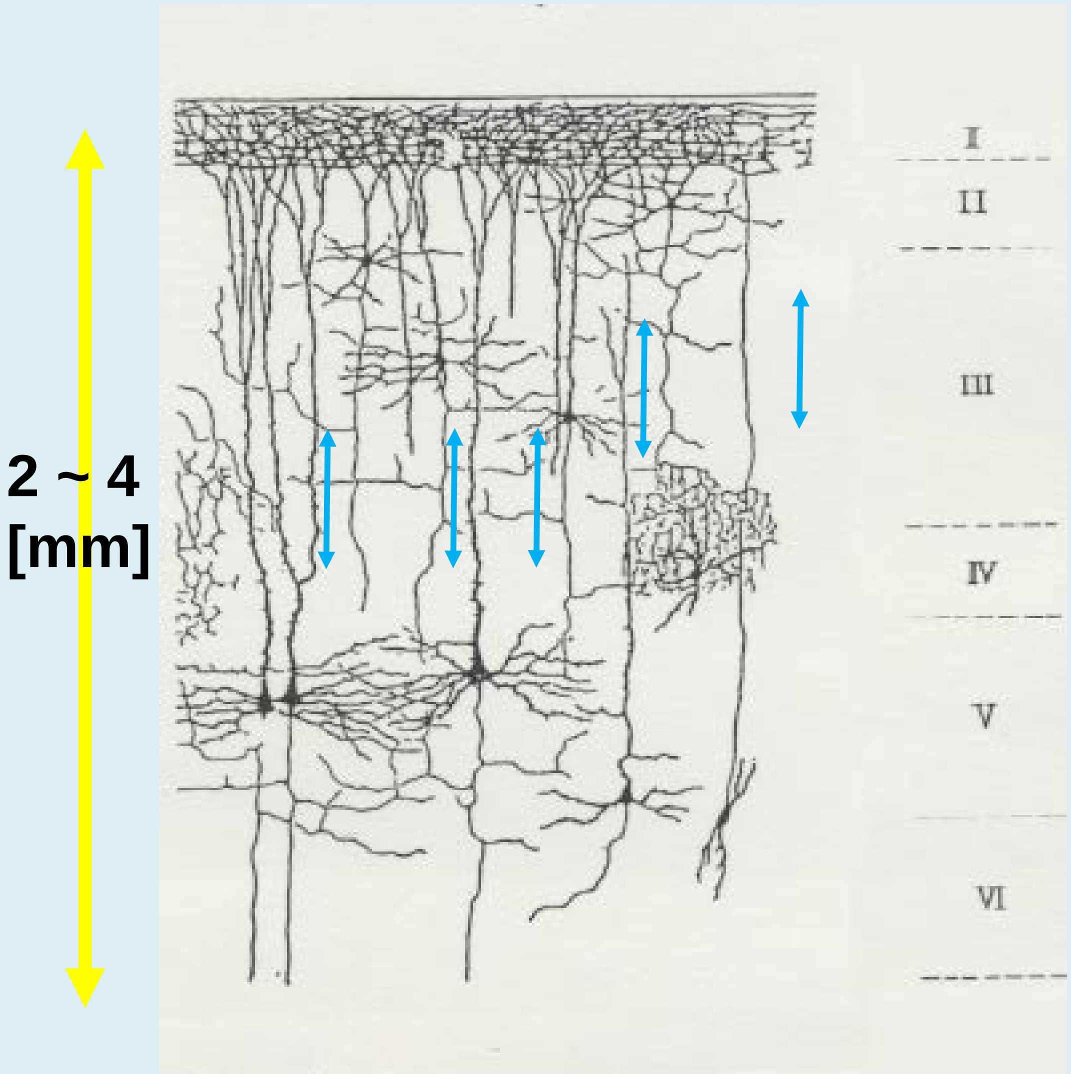
MEG信号の起源

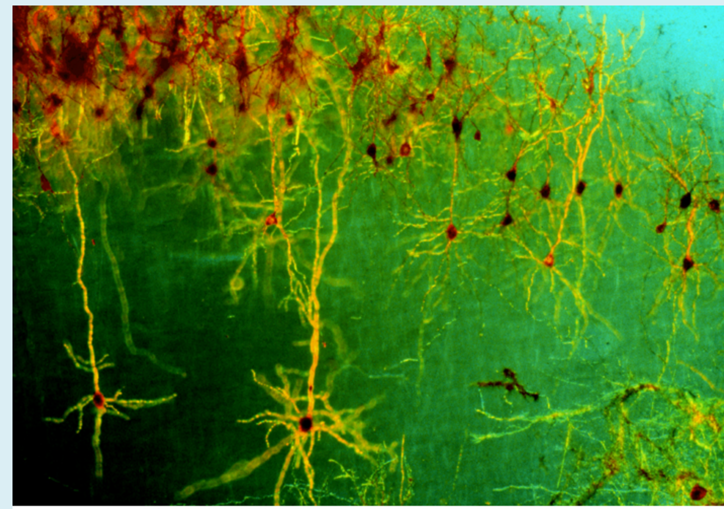




- 大脳皮質には多数の錐体細胞(neuron)がほぼ同じ向きで整列している.
- 錐体細胞が興奮するとその樹状突起(dendrite)に電流が流れる.
- 多数の整列した錐体細胞に電流が流れると頭部周囲で検出可能な磁場を発生する(PicoTeslaの強度). これを高感度磁束計(SQUID)で検出する.

大脳皮質の神経細胞の模式図と顕微鏡写真





Pyramidal neurons of mouse cortex. Picture: Tobias Bonhoeffer, MPI of Neurobiology

ソースとなる電流（生理学的電流）

磁場を生じる電流には，2種類の電流がある．（以下電流は電流密度で記述する）

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_S + \boldsymbol{J}_R$$

$\boldsymbol{J}_S$：神経，筋肉などの生体の活動により起電力が生じ，その起電力により生じる電流．生体活動を直接反映している．プライマリーカレント（1次電流）やインパルスカレント，細胞内電流などと呼ばれる．

$\boldsymbol{J}_R$：生体の活動により生じたプライマリーカレントの結果として（電荷の保存則を満たすため）生じる電流．セコンダリーカレント，リターンカレント，ボリュームカレントなどと呼ばれる．

$\boldsymbol{J}$：これら2種類の電流の和．トータルカレントと呼ばれる．

プライマリーカレントについての補足

生体組織における電流はカリウム（K+），ナトリウム（Na+），クローム（Cl-）やカルシウム（Ca2+）などの流れ（移動）によるものである.

生体内でイオンの流れを引き起こす2種の異なる要因が存在する.

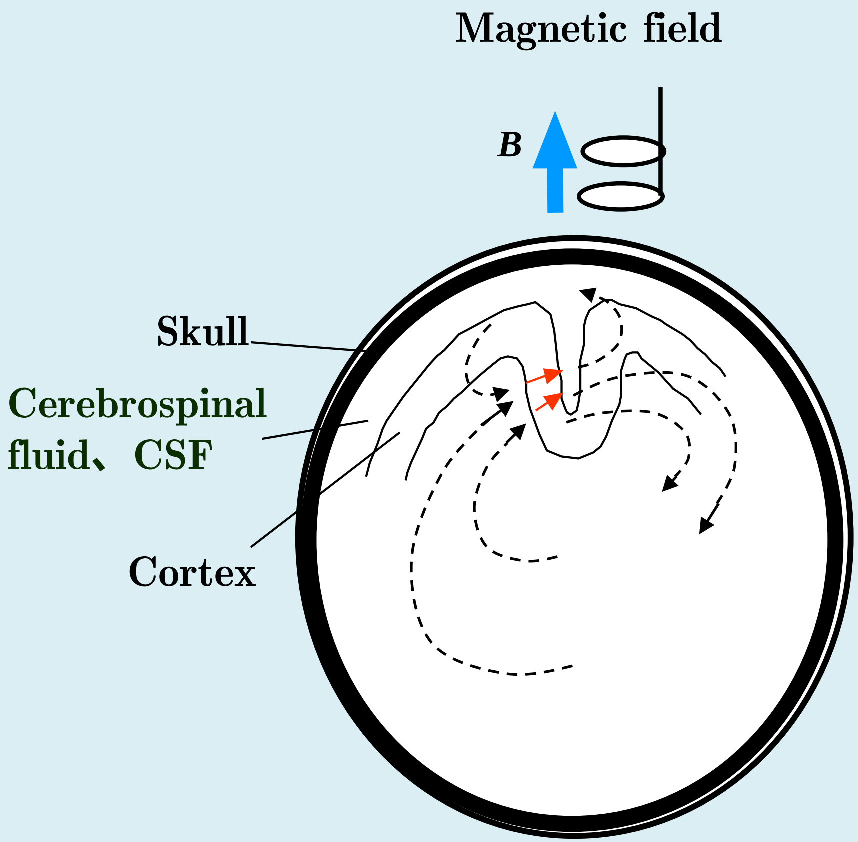
1. イオンの存在する位置でのイオンの濃度勾配

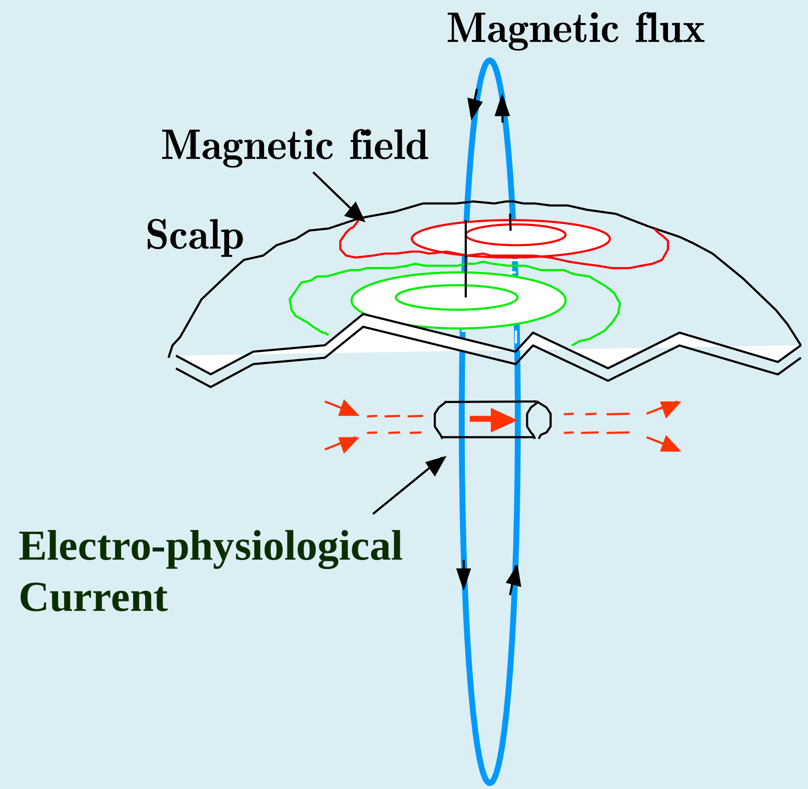
生体が活動すると，イオンの濃度勾配を生じ，活動に応じたイオンの流れ(ionic flux) が発生する．イオンの流れは電流密度に比例する.

2. イオンの存在する位置での電場

電場の存在下でイオンは最初加速されるがやがて最終速度（terminal velocity）に到達し，一定のイオンの流れとなる．このイオンの流れによる電流は通常のオームの法則：$\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{E}$ で表される.

生体活動を直接反映するのはイオンの濃度勾配による電流であり，これがプライマリーカレントである.





$\boldsymbol{J}_S$ ： 赤い矢印　神経活動部位に対応.

$\boldsymbol{J}_R$ ：点線の部分　神経活動部位の周辺に広がって存在

$\boldsymbol{J}$ ： 両方を合わせた電流　神経活動部位の周辺に広がって存在

プライマリーカレントとセンサー出力（磁場）の関係を求めたい.
つまり，センサーのプライマリーカレントに対する感度を求める.

トータル電流 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_S + \boldsymbol{J}_R$ と磁場の関係は？

ビオ・サバールの式

$\boldsymbol{r}$ の位置にある電流 $\boldsymbol{J}$ が 作る磁場 $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{\boldsymbol{J} \times (\boldsymbol{r}_D - \boldsymbol{r})}{\left|\boldsymbol{r}_D - \boldsymbol{r}\right|^3}$

として計算できる.

Maxwell方程式から直接導くことができる.

しかし，磁場から検出したいのは生体活動を直接反映した $\boldsymbol{J}_S$ であるので $\boldsymbol{J}_S$ と磁場との関係を求めたい.

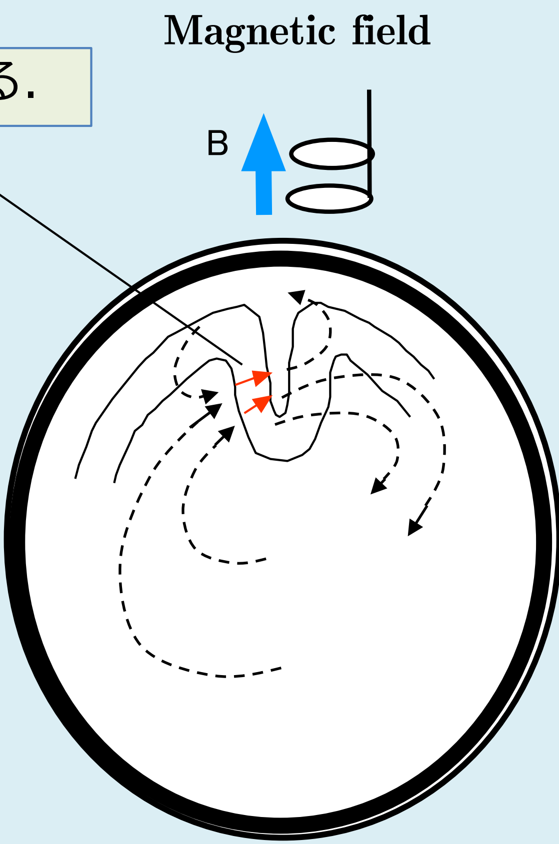
- 磁場と $\boldsymbol{J}_S$ の関係を求めるには, $\boldsymbol{J}_R$ がどのように流れるかを調べなければならず，生体内での導電率分布が必要である.
- 一様な導電率を持った球体モデルを仮定すれば，磁場と $\boldsymbol{J}_S$ の関係を公式として求めることができる（導電体の対称性から $\boldsymbol{J}_R$ の作る磁場は導体の外側でゼロとなる．）

→ Sarvas 公式

やろうとすること

$\boldsymbol{r}$ の位置にある電流 $\boldsymbol{J}_S$ が 作る磁場 $\boldsymbol{B}$ を計算する式を導く

神経活動によりイオンの濃度勾配が生じ起電力が発生する.



電荷 q を持つ荷電粒子が電場 $\boldsymbol{E}$ の中に存在すると,
$q\boldsymbol{E}$ の力を受ける．さらに，イオンの濃度勾配による起電力 $\boldsymbol{F}_S$ が存在すれば，トータル $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + \boldsymbol{F}_S$ の力を受ける.

電流密度 $\boldsymbol{J}$ は，力 $\boldsymbol{F}$ に比例するので，以下を得る.

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_S + \sigma\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J}_S + \boldsymbol{J}_R$$

$\boldsymbol{J}$ ：トータルカレント

$\boldsymbol{J}_S$ ：(神経活動により発生した)外部起電力の電流密度換算値

$\boldsymbol{J}_R$ ：体積電流(起電力の存在により2次的に発生する電流成分

σ：導電率

よく使う関係式の導出

電場 $\boldsymbol{E}$ は電位 V を用いて，$\boldsymbol{E} = -\nabla V$ と表せる．

$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_S + \sigma \boldsymbol{E}$ から，$\boldsymbol{E} = -\nabla V$ を用いて，$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_S - \sigma \nabla V$ を得る．

また，Biot-Savartの式を以下のように表す：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \times \frac{\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|^3} d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}$$

ここで，Green関数は.

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|^3} = \nabla \left| \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \right|^{-1}$$

である．Ω は電流の存在する領域である．

これらの関係式を用いることで，導体中の電流が作る磁場を議論できる．

一様で無限に広がった導電体中の磁場

積分公式を用いると，以下の恒等式の左辺がゼロであることを示せる：

$$\int_\Omega \nabla\times(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\,|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^{-1})d\boldsymbol{r} = \int_\Omega |\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^{-1}\,\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} + \int_\Omega(\nabla|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^{-1})\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

この項はゼロとなる.

したがって：

$$\int_\Omega \frac{\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}d\boldsymbol{r} = -\int_\Omega(\nabla|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^{-1})\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_\Omega \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\times(\nabla|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^{-1})d\boldsymbol{r} = \int_\Omega \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

が成り立つので，Biot Savartの式は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}d\boldsymbol{r}$$

と表すことができる.

一様で無限に広がった導電体中の磁場

さらに， $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \dfrac{\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}d\boldsymbol{r}$ に $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_S - \sigma\nabla V$ を代入して

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\nabla\times(\boldsymbol{J}_S - \sigma\nabla V)}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\nabla\times\boldsymbol{J}_S - \sigma(\nabla\times\nabla V)}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}d\boldsymbol{r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\nabla\times\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

が成り立つ．　（恒等式 $\nabla\times\nabla V = 0$ を用いた．）

プライマリーカレント $\boldsymbol{J}_S$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')$ の関係はBiot Savartの式と全く同じ形をしている．

まとめると，一様で無限に広がった導電体中において：

Biot Savartの関係式と同じ形の式：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega}\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

が，プライマリーカレント $\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')$ の間に成り立つ.

一方，トータル電流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')$ の間にも，Biot Savartの式：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

が成り立つ.

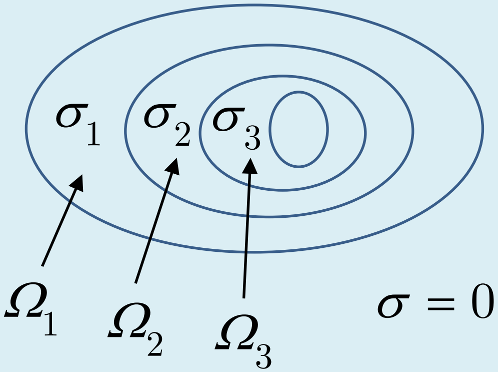
すなわち，一様で無限に広がった導電体中では体積電流 $\sigma\nabla V$ は磁場に影響しない.

プライマリーカレントが局在した点状の電流ならば, $\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{Q}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ であるので

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega}\boldsymbol{Q}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{Q}\times\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|^3}$$

である.

有限な境界を持つ多層導電体ー磁場の導出



導電体が領域　$\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ に分割でき，それぞれの領域内では一定の導電率 $\sigma_1, \cdots, \sigma_N$ を持つとする．また，導電体の外側では導電率ゼロとする．

トータル電流の式： $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_S - \sigma \nabla V$をBiot Savartの式に代入して，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\Omega \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\Omega [\boldsymbol{J}_S - \sigma \nabla V] \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}$$

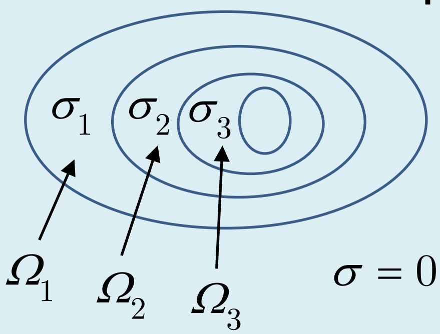
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\Omega \boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \int_{\Omega_j} \nabla V(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}$$

補正項

無限一様導体による磁場

それぞれの領域内では導電率一定の仮定から

有限な境界を持つ多層導電体ー磁場の導出



補正項について：

$\int_{\Omega_j} \nabla V(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}$ を次のように変形する

まず，恒等式： $\nabla V(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) = \nabla \times [V(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})]$ を用いて，

$$\int_{\Omega_j} \nabla V(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \int_{\Omega_j} \nabla \times [V(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})] d\boldsymbol{r}$$ を得る.

先ほどの積分公式を用いて

$$\int_{\Omega_j} \nabla V(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \int_{\Omega_j} \nabla \times [V(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})] d\boldsymbol{r} = \int_{\partial \Omega_j} d\boldsymbol{S} \times [V(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})]$$

領域 Ω_j の境界上の面積分

面素ベクトルを法線方向単位ベクトル $d\boldsymbol{S}$ を用いて$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) dS$ と表せば，補正項は

$$\int_{\Omega_j} \nabla V(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \int_{\partial \Omega_j} d\boldsymbol{S} \times [V(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})] = \int_{\partial \Omega_j} V(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) \times [\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})] dS$$

と表せる.

補足説明（2018-0603追加）

恒等式：$\nabla V(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})=\nabla\times[V(\boldsymbol{r})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]$　について：

まず，

$$\nabla\times[V(\boldsymbol{r})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]=\nabla V(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})+V(\boldsymbol{r})\nabla\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$$

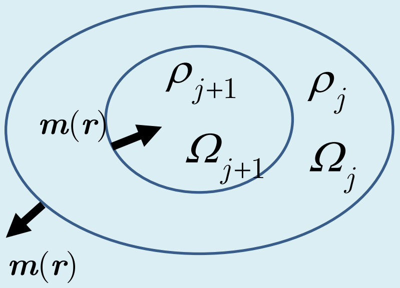
は成り立つ．ここで，　$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})=\nabla\left|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right|^{-1}$　であるので，

$$\nabla\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})=\nabla\times\nabla\left|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right|^{-1}=0$$　（補足資料の(1.38)式）であるので，

$$\nabla V(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})=\nabla\times[V(\boldsymbol{r})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]$$

が成立する．

Geselowitzの式



領域 Ω_j は，Ω_{j+1} と接する面と，Ω_{j-1} と接する面の2種類の境界があり，法線ベクトルの符号は逆向きになることに注意すれば以下のGeselowitzの式を得る．

$$\boldsymbol{B}(\mathbf{r}') = \boldsymbol{B}_0(\mathbf{r}') - \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}(\sigma_j - \sigma_{j+1})\int_{\partial\Omega_j} V(\mathbf{r})\boldsymbol{m}(\mathbf{r}) \times [\mathbf{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]\, dS$$

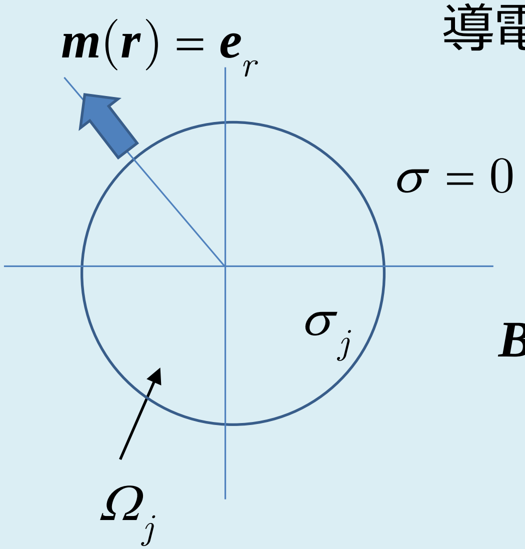
ここで，$\boldsymbol{B}_0(\mathbf{r}')$ は無限一様導体による磁場：

$$\boldsymbol{B}_0(\mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega} \boldsymbol{J}_S(\mathbf{r}) \times \mathbf{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

$\sigma_j V(\mathbf{r})$ は境界での体積電流強度であり，
境界上での体積電流が補正項となっている．

一様でない導電体における磁場は，一様と仮定したときの磁場を，導電体の（異なる導電率の部分の）境界上での体積電流で補正したものとして計算できる．

導電体が球対称な場合を考える



球中心を原点として，動径方向の単位ベクトルをGeselowitzの式の両辺に乗ずる.

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{e}_r - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^{N} (\sigma_j - \sigma_{j+1}) \int_{\partial \Omega_j} V(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_r \ dS$$

導電体が球対称なので $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_r$ である.

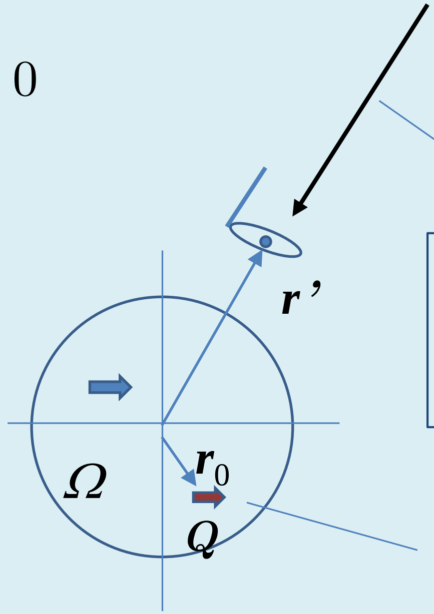
また，ベクトル積の性質より $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ であるので，結局以下を得る.

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{e}_r$$

球対称な導体において，磁場の法線成分は体積電流の影響を受けない.
「MEGにおいて磁場の法線成分を検出し，法線成分からプライマリーカレントの分布を推定する．」という伝統的な方法の理論的根拠である.

$\rho = 0$

均一な球対称導体の外側における磁場 Sarvas公式の導出



ポテンシャル$U(\boldsymbol{r}')$は無限遠から $\boldsymbol{r}'$ の位置に単位の磁化を運んでくる仕事量に等しい．経路には寄らないので，動径に沿って磁化を運んでくるとする．

$\boldsymbol{r}_0$ の位置に電流密度$\boldsymbol{Q}$のプライマリーカレントが存在

導体の外側には電流が存在しないので，$\nabla' \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = 0$であり，$\boldsymbol{r}'$ 位置の磁場$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')$はスカラーポテンシャルの勾配で与えられる．

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = -\mu_0 \nabla' U(\boldsymbol{r}')$$

ポテンシャルは無限遠から単位強度の磁化を$\boldsymbol{r}'$の位置まで動径に沿って運ぶ仕事量として計算できる．

$$U(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{\mu_0}\int_0^\infty \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}' + t\boldsymbol{e}_r)\cdot \boldsymbol{e}_r dt = \frac{1}{\mu_0}\int_0^\infty \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}' + t\boldsymbol{e}_r)\cdot \boldsymbol{e}_r dt$$

動径上の磁場は$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}')$で表される（ここがポイント）

均一な球対称導体の外側における磁場
Sarvas公式の導出

仕事量：　$U(\boldsymbol{r}') = \dfrac{1}{\mu_0}\int_0^\infty \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}' + t\boldsymbol{e}_r)\cdot\boldsymbol{e}_r dt$　を計算する．

位置 $\boldsymbol{r}_0$ に電流密度 $\boldsymbol{Q}$ のプライマリー電流が有る場合，任意の $\boldsymbol{r}$ の位置の $\boldsymbol{B}_0$ 磁場は：

$$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{Q}\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$$

であるので，

$$U(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{\mu_0}\int_0^\infty \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}' + t\boldsymbol{e}_r)\cdot\boldsymbol{e}_r dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \boldsymbol{Q}\times\frac{(\boldsymbol{r}' + t\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{e}_r}{|\boldsymbol{r}' + t\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{r}_0|^3} dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\boldsymbol{Q}\times(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{e}_r - {\color{blue}(\boldsymbol{Q}\times t\boldsymbol{e}_r)\cdot\boldsymbol{e}_r}}{|\boldsymbol{r}' + t\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{r}_0|^3} dt = \frac{\boldsymbol{Q}\times(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{e}_r}{4\pi}\int_0^\infty \frac{1}{|\boldsymbol{r}' + t\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{r}_0|^3} dt$$

となる．(分子で積分変数 t を含む青の項はゼロである．)

あとは，積分 $\int_0^\infty \frac{1}{|\boldsymbol{r}'+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0|^3}dt$ を腕ずくで計算する．

$|\boldsymbol{r}'+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0|^2=(\boldsymbol{r}'+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{r}'+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0)=t^2+2\boldsymbol{e}_r\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)t+|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|^2$ であるので，

$B=2\boldsymbol{e}_r\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)$， $C=|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|^2$ とすれば，この積分は $\int_0^\infty (t^2+Bt+C)^{-3/2}dt$ と表される．

積分を実行すると，

$$U(\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4\pi}\frac{(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{r}'}{A}$$

ただし， $A=|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0||\boldsymbol{r}'|+|\boldsymbol{r}'|^2-\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}')$

を得る．さらに，磁場は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')=-\mu_0\nabla' U(\boldsymbol{r}')$ を計算することにより以下の

Sarvas公式を得る．

$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\frac{(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{r}}{A}=\frac{\mu_0}{4\pi A^2}[A\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0-[(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{r}]\nabla A]}$$

ここで，わずらわしいので座標の表記を $\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}$ とした．また，∇A については
補足資料を参照のこと．

Sarvasの式： $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\nabla\dfrac{(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{r}}{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi A^2}[A\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0 - [(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{r}]\nabla A]$ の特徴

1. 導電率を含まない．したがって,磁場は導電率には依存しない.
2. $\boldsymbol{Q} \propto \boldsymbol{r}$ であるようなradial dipoleは導電体の外側で磁場を作らない.
3. 球中心にある電流は磁場を作らない． $\boldsymbol{r}_0 = 0$ なら $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$ である.

- 計算に生体の導電率を必要としない.

- 球中心にある電流は球の外側に磁場を作らない．すなわち，球中心ではセンサーリードフィールドはゼロになる.

  センサーは球の中心（付近）に感度を持たない．球中心（すなわち脳深部）の推定は不正確となる.

- 動径方向を向いた電流は球の外側に磁場を作らない.

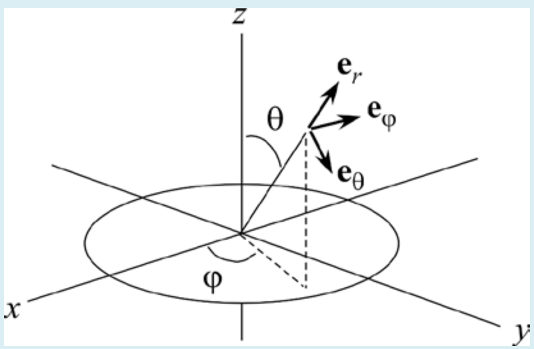
  電流ベクトルは(x,y,z) 成分から (r,φ,θ) 成分に変換し動径(r)成分は捨て去り (φ,θ)成分のみを用いる.

Sarvas公式を用いたセンサーリードフィールドの具体的な計算
極座標系への変換

「動径方向を向いた電流は球の外側に磁場を作らない．」ことから電流ベクトルは独立な3成分をもたない．

そのため，電流ベクトルの成分を（x,y,z）成分から，動径成分と2つの接線成分からなる座標系　$(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$ へ変換する

変換の実際



直交座標成分の単位ベクトルを$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$とする．

ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ と表される場合，このベクトルを　$(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$ で表すと，

$\boldsymbol{x} = R\boldsymbol{e}_r + \Theta\boldsymbol{e}_\theta + \Phi\boldsymbol{e}_\varphi$ とすれば，

$$R = x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos\varphi$$
$$\Theta = x\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi - z\sin\varphi$$
$$\Phi = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

である(岩波　数学公式I,p22)．

Sarvas公式を用いたセンサーリードフィールドの具体的な計算ー続き

位置 $\boldsymbol{r}$ におけるリードフィールドは直交座標系(x,y,x)における3成分ではなく接線成分である(φ,θ)の2成分 $[\boldsymbol{l}_\theta(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{l}_\varphi(\boldsymbol{r})]$ で表現.

$\boldsymbol{l}_\theta(\boldsymbol{r})$ のm番目の要素 $l_m^\theta(\boldsymbol{r})$ の計算：

$\boldsymbol{r}$ の位置に向き $\boldsymbol{e}_\theta$ の方向を向いた単位強度の電流ベクトルがあるとして各センサー位置での磁場をSarvas公式を用いて計算し，$l_m^\theta(\boldsymbol{r}),\ m=1,\ldots,M$ を求める.

$$\underbrace{l_m^\theta(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_m)}_{m\text{番目のセンサー位置での磁場ベクトル}} \cdot \boldsymbol{\zeta}_m \longleftarrow m\text{番目のセンサーの向き}$$

である．ベースラインDの軸型微分コイルを考慮すれば，リードフィールドは

$$l_m^\theta(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_m)\cdot\boldsymbol{\zeta}_m - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_m + D\boldsymbol{\zeta}_m)\cdot\boldsymbol{\zeta}_m$$

と計算する.

一様で無限に広がった導電体における電位 $V(\boldsymbol{r}')$ の計算

トータル電流：$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_S - \sigma\nabla V$ において，電流の保存則が成り立つ.

$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0$ したがって $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_S - \sigma\nabla^2 V = 0$ が成り立つ.

つまり，電位はPoisson方程式 $\nabla^2 V(\boldsymbol{r}') = \dfrac{\nabla\cdot\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})}{\sigma}$ に従うので以下の解となる

$$V(\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi\sigma}\int_\Omega \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})}{|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|}d\boldsymbol{r}$$

磁場の式： $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\nabla\times\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})}{|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|}d\boldsymbol{r}$$

との類似性に着目して，ほとんど同じ導出を行なう.

まず，以下の恒等式において：

$$\int_\Omega \nabla\cdot(\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})\,|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|^{-1})d\boldsymbol{r} = \int_\Omega |\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|^{-1}\,\nabla\cdot\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} + \int_\Omega(\nabla\,|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|^{-1})\cdot\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

左辺はガウスの定理によりゼロとなるので，以下を得る ⇒

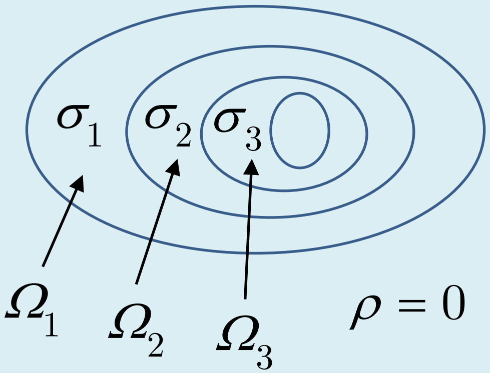
$$V(\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi\sigma}\int_\Omega \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})}{|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|}d\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\sigma}\int_\Omega \boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})\cdot(\nabla\,|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|^{-1})d\boldsymbol{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\sigma}\int_\Omega \boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

局在したプライマリーカレントの場合，$\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{Q}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ であるので

$$V(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\sigma}\int_\Omega \boldsymbol{Q}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)}{|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0\,|^3}$$

を得る.



有限な境界を持つ多層導電体
電位の導出

導電体が領域 $\Omega_1,\ldots,\Omega_N$ に分割でき，それぞれ導電率 $\sigma_1,\ldots,\sigma_N$ を持つとする.

この場合以下を導くことができる(Geselowitz)

$$\rho(\mathbf{r}')V(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \mathbf{J}_S(\mathbf{r})\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r})d\mathbf{r} - \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}(\sigma_j - \sigma_{j+1})\int_{\partial\Omega_j} V(\mathbf{r})\mathbf{m}(\mathbf{r})\cdot[\mathbf{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r})]\,dS$$

無限一様導体の解

境界での体積電流に依存した補正項

ちなみに，磁場は以下で表される.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega} \mathbf{J}_S(\mathbf{r})\times\mathbf{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r})d\mathbf{r} - \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}(\sigma_j - \sigma_{j+1})\int_{\partial\Omega_j} V(\mathbf{r})\mathbf{m}(\mathbf{r})\times[\mathbf{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r})]\,dS$$

磁場と電位は対称性の良い式で表される. （赤で示した部位が異なるのみ）

Realistic-Headshape Model--Boundary Element Method

3次元MRIから実形状に合わせた頭部境界を検出．頭の内側は一様導電率 ρ で外側はゼロとする．

頭部外側の $\boldsymbol{r}'$ 点における磁場は，Ω は頭部領域，$\partial\Omega$ はその境界で

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega} \boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\partial\Omega} \sigma V(\boldsymbol{r})\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) \times [\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]\, dS$$

で計算される．

境界上での体積電流

右辺第2項を計算するためには，境界での電位 $V(\boldsymbol{r})$ が必要であり，

$$\frac{1}{2}\sigma V(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} \sigma V(\boldsymbol{r})\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\, dS$$

を数値計算で解く．境界上の $V(\boldsymbol{r})$ が求まればこれを用いて磁場を求める．

⇨ **Single-compartment Boundary Element Method(BEM)**

Multiple local sphere model

m番目のセンサーデータは，$J_V(\boldsymbol{r}) = \sigma V(\boldsymbol{r})$ と書いて，以下のように表される

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_m)\cdot\boldsymbol{\zeta}_m = [\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}]\cdot\boldsymbol{\zeta}_m + [\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\partial\Omega} J_V(\boldsymbol{r})[\boldsymbol{\zeta}_m\cdot\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r})]\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]\,dS$$

体積電流項（右辺第2項）を最も良く近似する球を各センサーについて求める．

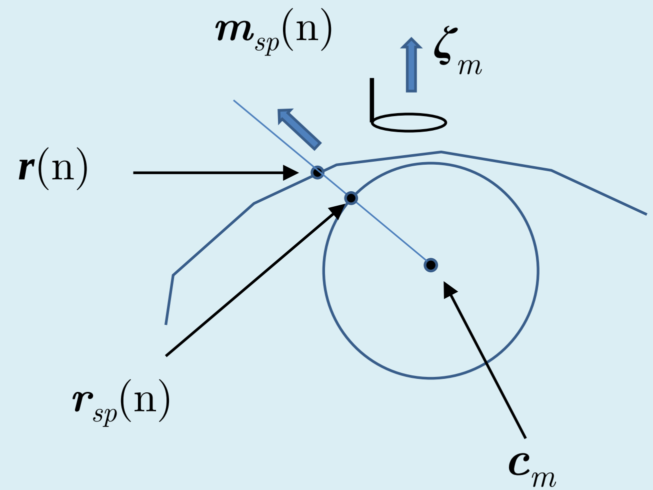
つまり，

$$\int_{\partial\Omega}[\boldsymbol{\zeta}_m\cdot\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r})]\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_m,\boldsymbol{r})]\,dS = \int_{\partial\Omega_{sp}}[\boldsymbol{\zeta}_m\cdot\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r})]\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_m,\boldsymbol{r})]\,dS$$

が最もよく成り立つ球中心と半径をセンサーごとに求める．

左辺は境界をMRIから求めた頭蓋内側の境界で計算し，右辺は球中心と半径を仮定して計算する．そして，近似を最も良く成り立たせる球中心と半径を求める．

Multiple local sphere model



$\boldsymbol{r}(\mathrm{n})$:頭蓋内壁の n 番目メッシュ点の座標

$\boldsymbol{m}(\mathrm{n})$: $\boldsymbol{r}(\mathrm{n})$での頭蓋内壁に対する法線ベクトル

$\boldsymbol{r}_{sp}(\mathrm{n})$: $\boldsymbol{r}(\mathrm{n})$に対応した球面上のメッシュ点座標

$\boldsymbol{m}_{sp}(\mathrm{n})$: $\boldsymbol{r}_{sp}(\mathrm{n})$での法線ベクトル

とすれば， $\boldsymbol{m}_{sp}(n) = \dfrac{\boldsymbol{r}(n) - \boldsymbol{c}_m}{|\,\boldsymbol{r}(n) - \boldsymbol{c}_m\,|}$ および $\boldsymbol{r}_{sp}(n) = R_m \boldsymbol{m}_{sp}(n) + \boldsymbol{c}_m$ となる．

ここで，$\boldsymbol{c}_m$ は球中心の座標，R_m は球の半径である．これらは

$$F = \sum_n \left[[\boldsymbol{\zeta}_m \cdot \boldsymbol{m}(n)] \times \frac{\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}(n)}{|\,\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}(n)\,|^3} - [\boldsymbol{\zeta}_m \cdot \boldsymbol{m}_{sp}(n)] \times \frac{\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_{sp}(n)}{|\,\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_{sp}(n)\,|^3} \right]^2$$

を最小にする$\boldsymbol{c}_m$ とR_m として求める．右辺第1項はMRIから推定した量で計算する．

- 他の直感的な方法（例えば，センサー近傍の頭蓋の曲がり具合から球の中心と半径を求める等）にどう比較できるのか？

- 「直感的な方法」は，求めたmultiple sphere導電体が実形状導電体を近似することの根拠に乏しい．

Perturbation Method

興味深い方法（うまく行くかどうか不明）

センサーリードフィールドを定義：

$$B(\boldsymbol{r}') = \int_{\Omega} \boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{d}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}$$

位置 $\boldsymbol{r}'$に在るセンサーの位置 $\boldsymbol{r}$ における感度

$B(\boldsymbol{r}')$： 位置 $\boldsymbol{r}'$ に存在するセンサーの出力

$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$：センサーリードフィールド． $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) = [d_x(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}), d_y(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}), d_z(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})]$

実形状導電体で計算したリードフィルド$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{r})$は，球モデルによるリードフィルド$\boldsymbol{d}_{sph}(\boldsymbol{r})$ にある補正項を加えたもので表すことができる．

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{d}_{sph}(\boldsymbol{r}) - \nabla U(\boldsymbol{r})$$

補正項は，あるスカラー関数 $U(\boldsymbol{r})$ の勾配で表される：

ここで， $\nabla \cdot \boldsymbol{d}(\boldsymbol{r}) = \nabla \cdot \boldsymbol{d}_{sph}(\boldsymbol{r}) - \nabla^2 U(\boldsymbol{r}) = 0$ であり，$\nabla \cdot \boldsymbol{d}_{sph}(\boldsymbol{r}) = 0$であるので，結局， $\nabla^2 U(\boldsymbol{r}) = 0$ である．つまり，スカラー関数 $U(\boldsymbol{r})$ はラプラス方程式を満たすので，調和関数で表される．

G. Nolte, Phys. in Med. Biol. 48, 3637-3652, 2003

Perturbation Method一続き

したがって，（例えば）球面調和関数の基底関数を用いて, $U(\boldsymbol{r}) = \sum_j c_j u_j(\boldsymbol{r})$ と表せ, リードフィールドは

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{d}_{sph}(\boldsymbol{r}) - \sum_j c_j \nabla u_j(\boldsymbol{r})$$

と表せる．したがって，実形状導体におけるリードフィールドを計算する問題は上の式での展開係数を求める問題に帰着する.

- 展開係数は，境界条件：「導電体の境界でリードフィールドの法線成分がゼロになること」を満たすという要求から決めることができる.
- この境界条件は，境界に直行するプライマリーカレントは磁場を作らないことを意味する.

つまり，境界上の点を $\boldsymbol{r}$ ，法線ベクトルを$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r})$，とすれば

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{d}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{d}_{sph}(\boldsymbol{r}) - \sum_j c_j \left[\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) \cdot \nabla u_j(\boldsymbol{r})\right] = 0$$

が成立することを意味する.

Perturbation Method一続き

MRIから頭蓋内壁を抽出し，境界のメッシュ座標を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{n}}$, その位置での法線ベクトルを$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{n}})$とすれば，コスト関数：

$$F = \sum_n \left[\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}_n)\cdot\boldsymbol{d}_{sph}(\boldsymbol{r}_n) - \sum_j c_j[\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}_n)\cdot\nabla u_j(\boldsymbol{r}_n)]\right]^2$$

をなるべく小さくなるように係数c_jを決める．　つまり，

$$\hat{c}_j = \arg\min_{c_j} F$$

である．ここで，

- $\boldsymbol{d}_{sph}(\boldsymbol{r})$はSarvas公式から計算したものを用いる．
- $u_j(\boldsymbol{r})$は球面調和関数を用いることができる．

- かなり以前に提案された方法であるが，どこかで実施しているという話は聞いていない．Guidoの論文が解りにくいためか??

積分公式（付録の1.51式）

$$\int_{\Omega} \nabla \times (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \,|\, \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \,|^{-1}) d\boldsymbol{r} = \int_{\Omega} |\, \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \,|^{-1} \ \nabla \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \ d\boldsymbol{r} + \int_{\Omega} (\nabla \,|\, \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \,|^{-1}) \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}$$

左辺の項は，以下のように表せる.

$$\int_{\Omega} \nabla \times (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \,|\, \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \,|^{-1}) \ d\boldsymbol{r} = \int_{\partial\Omega} d\boldsymbol{S} \times (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \,|\, \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \,|^{-1})$$

閉じた領域 Ω における体積積分

閉じた領域 Ω の領域境界 $\partial\Omega$ における面積積分（ここで，dS は面素ベクトル）

今，Ω は無限に広がった領域を考えているので，無限遠の境界，つまり $\partial\Omega$ 上では

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = 0$ が成立.

なぜならば，無限遠でゼロでないと電流のエネルギーが発散してしまう.

したがって，$\int_{\partial\Omega} d\boldsymbol{S} \times (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \,|\, \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \,|^{-1}) = 0$ つまり $\int_{\Omega} \nabla \times (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \,|\, \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \,|^{-1}) \ d\boldsymbol{r} = 0$ が成立.

ガウスの定理（付録の1.50式）

$$\int_\Omega \nabla\cdot(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\,|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|^{-1})d\boldsymbol{r} = \int_\Omega |\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|^{-1}\ \nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\ d\boldsymbol{r} + \int_\Omega(\nabla\,|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|^{-1})\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

左辺の項は，以下のように表せる（ガウスの定理）．

$$\int_\Omega \nabla\cdot(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\,|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|^{-1})\ d\boldsymbol{r} = \int_{\partial\Omega} d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\,|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|^{-1})$$

閉じた領域 Ω における体積積分

閉じた領域 Ω の領域境界 $\partial\Omega$ における面積積分（ここで，$d\boldsymbol{S}$ は面素ベクトル）

今，Ω は無限に広がった領域を考えているので，無限遠の境界，つまり $\partial\Omega$ 上では

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})=0$ が成立.

なぜならば，無限遠でゼロでないと電流のエネルギーが発散してしまう.

したがって，$\int_{\partial\Omega} d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\,|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|^{-1})=0$ つまり $\int_\Omega \nabla\cdot(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\,|\,\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\,|^{-1})\ d\boldsymbol{r}=0$ が成立.