

株式会社シグナルアナリシス技術資料

Recursive Null Steering (RENS) beamformer

株式会社シグナルアナリシス
関原 謙介

Typical non-adaptive spatial filters

—Minimum-norm-based methods

- 空間分解能が低い
- 3次元再構成の場合にソースバイアスが大きい
- データのタイムサンプルが少ない場合でも適用可能. シングルタイムポイントのデータにも用いることができる.

Typical adaptive spatial filters

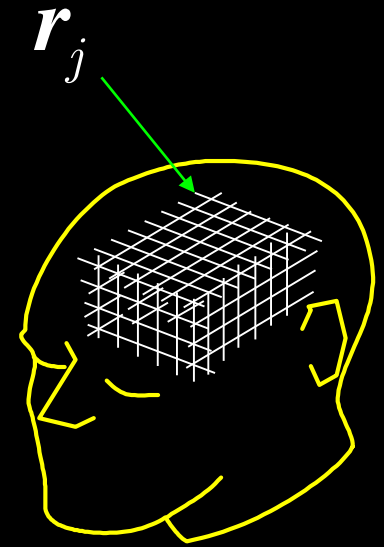
—Minimum-variance-based methods

- 空間分解能は高い.
- ソースバイアスは一般的に小さい.
- 多数のタイムサンプルデータが必要. (精度の良い共分散行列を得るため)
- ソースの相関の影響を受ける.

Minimum-norm spatial filter

Measurement equation

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{l}(\mathbf{r}_1) & \cdots & \mathbf{l}(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} s(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ s(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\mathbf{x}$$



Minimum-norm solution

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{H}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{y}$$

This solution is equivalent to spatial filter formulation:

$$\hat{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{w}^T(\mathbf{r}) \mathbf{y}, \quad \mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{l}(\mathbf{r})$$

ミニマムノルムフィルターの別の導出

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \arg \min_{\mathbf{w}(\mathbf{r})} \int [\mathbf{w}(\mathbf{r})\mathbf{l}(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^2 d\mathbf{r}'$$



$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{l}^T(\mathbf{r}), \text{ where } \mathbf{G} = \int \mathbf{l}(\mathbf{r})\mathbf{l}^T(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

$\mathbf{w}(\mathbf{r})\mathbf{l}(\mathbf{r}')$ はビームレスポンスと呼ばれ、フィルター重み $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ が \mathbf{r}' に存在するソースからの信号をどの位通過させるかを表す。

ウエイト $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ にとっては、 \mathbf{r} 以外の位置から来る信号は「望まない」信号で「もれこみ」と呼ばれる。

積分 $\int [\mathbf{w}(\mathbf{r})\mathbf{l}(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^2 d\mathbf{r}'$ は、全ての位置からの「もれこみ」の総量を表す。これを最小にすることでミニマムノルムフィルターが求まる。

Minimum-norm filter with unit-gain constraint

leakage minimizationの定式化を小変更することでいろいろな
ミニマムノルムフィルターを導出できる。

ユニットゲイン制約を付加すると

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \arg \min_{\mathbf{w}(\mathbf{r})} \int \left[\mathbf{w}(\mathbf{r})\mathbf{l}(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]^2 d\mathbf{r}'$$

subject to $\underbrace{\mathbf{w}(\mathbf{r})\mathbf{l}(\mathbf{r})}_{\substack{\uparrow \\ \text{gain constraint}}} = 1$

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{l}^T(\mathbf{r})}{\mathbf{l}^T(\mathbf{r})\mathbf{G}^{-1}\mathbf{l}(\mathbf{r})}, \text{ where } \mathbf{G} = \int \mathbf{l}(\mathbf{r})\mathbf{l}^T(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

Weighted minimum-norm filter with unit-gain constraint

さらに、正の重み関数を付加し、重み付積分とすれば

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \arg \min_{\mathbf{w}(\mathbf{r})} \int p(\mathbf{r}') \left[\mathbf{w}(\mathbf{r}) \mathbf{l}(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]^2 d\mathbf{r}'$$



positive weighting function

subject to $\mathbf{w}(\mathbf{r}) \mathbf{l}(\mathbf{r}) = 1$



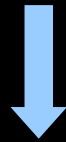
$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{\bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{l}^T(\mathbf{r})}{\mathbf{l}^T(\mathbf{r}) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{l}(\mathbf{r})}, \text{ where } \bar{\mathbf{G}} = \int p(\mathbf{r}) \mathbf{l}(\mathbf{r}) \mathbf{l}^T(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Weighted minimum-norm filter with array-gain constraint

もし、ゲイン制約がアレイゲイン制約なら、

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \arg \min_{\mathbf{w}(\mathbf{r})} \int p(\mathbf{r}') \left[\mathbf{w}(\mathbf{r}) \mathbf{l}(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]^2 d\mathbf{r}'$$

$$\text{subject to } \mathbf{w}(\mathbf{r}) \mathbf{l}(\mathbf{r}) = \|\mathbf{l}(\mathbf{r})\|$$



$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{\bar{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{l}}^T(\mathbf{r})}{\tilde{\mathbf{l}}^T(\mathbf{r}) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{l}}(\mathbf{r})}, \text{ where } \bar{\mathbf{G}} = \int p(\mathbf{r}) \mathbf{l}(\mathbf{r}) \mathbf{l}^T(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

$$\tilde{\mathbf{l}}(\mathbf{r}) = \mathbf{l}(\mathbf{r}) / \|\mathbf{l}(\mathbf{r})\|$$

Similarity with adaptive spatial filter

Weighted minimum-norm filter with unit-gain constraint

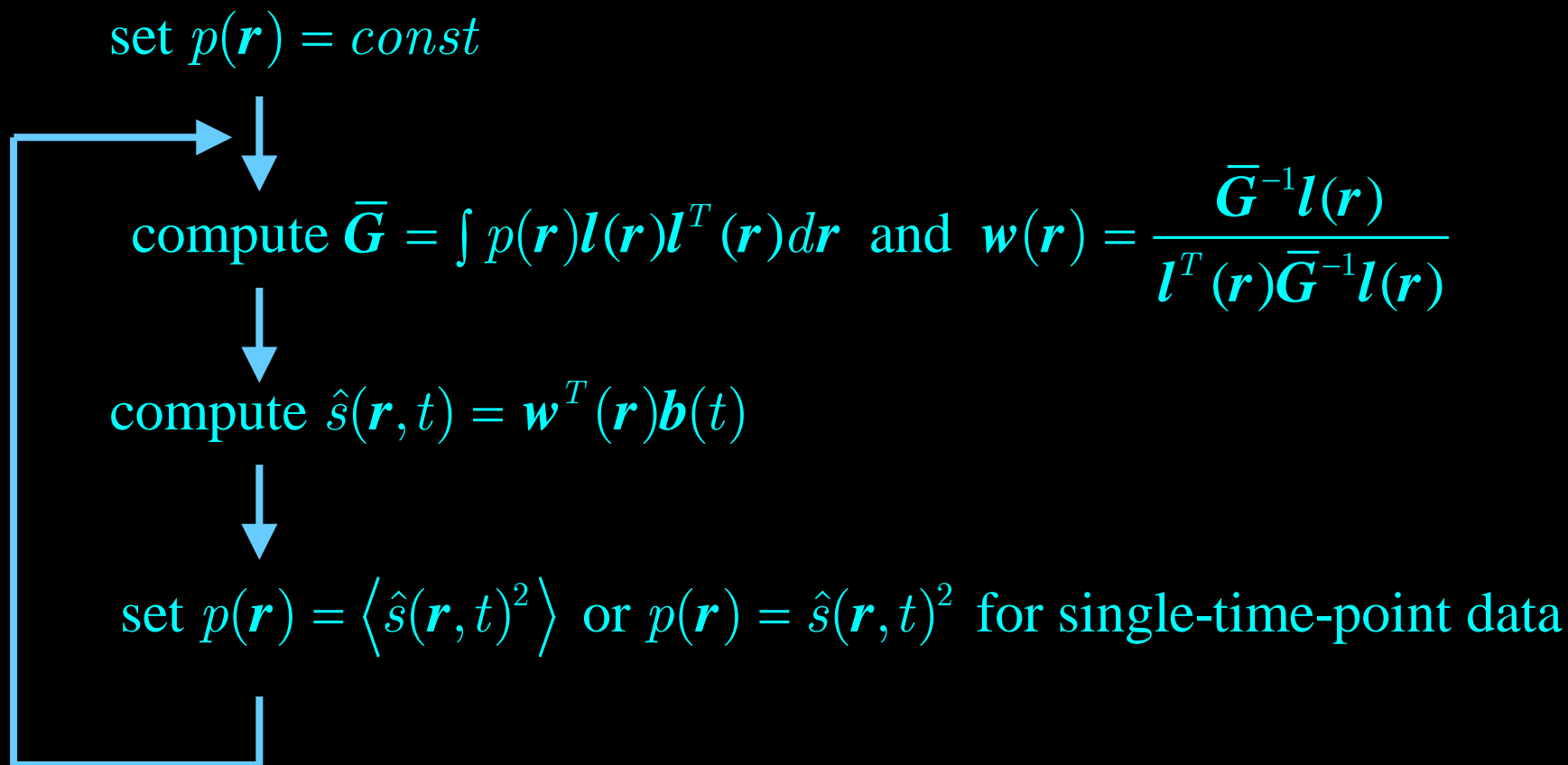
$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{\bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{l}^T(\mathbf{r})}{\mathbf{l}^T(\mathbf{r}) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{l}(\mathbf{r})}, \text{ where } \bar{\mathbf{G}} = \int p(\mathbf{r}) \mathbf{l}(\mathbf{r}) \mathbf{l}^T(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Minimum-variance spatial filter with unit-gain constraint

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{l}(\mathbf{r})}{\mathbf{l}^T(\mathbf{r}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{l}(\mathbf{r})} \text{ where } \mathbf{R} = \int \langle s(\mathbf{r}, t)^2 \rangle \mathbf{l}(\mathbf{r}) \mathbf{l}^T(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

もし $p(\mathbf{r})$ として $\langle s(\mathbf{r}, t)^2 \rangle$ に近いものを用いれば
weighted minimum-norm filter は、ノンアダプティブフィルター
としての利点を保持したまま minimum-variance filter に近い性能を
持つフィルターになるはず。

再帰的な手順により $p(\mathbf{r})$ に推定したソース分布を用いる



標本共分散行列を用いずにminimum variance filterに近い性能のフィルターを実現できる。

RENSフィルター バリエーション

scalar-RENS

$$\bar{\mathbf{G}} = \int \hat{s}(\mathbf{r}, t)^2 [\mathbf{l}_x(\mathbf{r})\mathbf{l}_x^T(\mathbf{r}) + \mathbf{l}_y(\mathbf{r})\mathbf{l}_y^T(\mathbf{r})] d\mathbf{r}$$

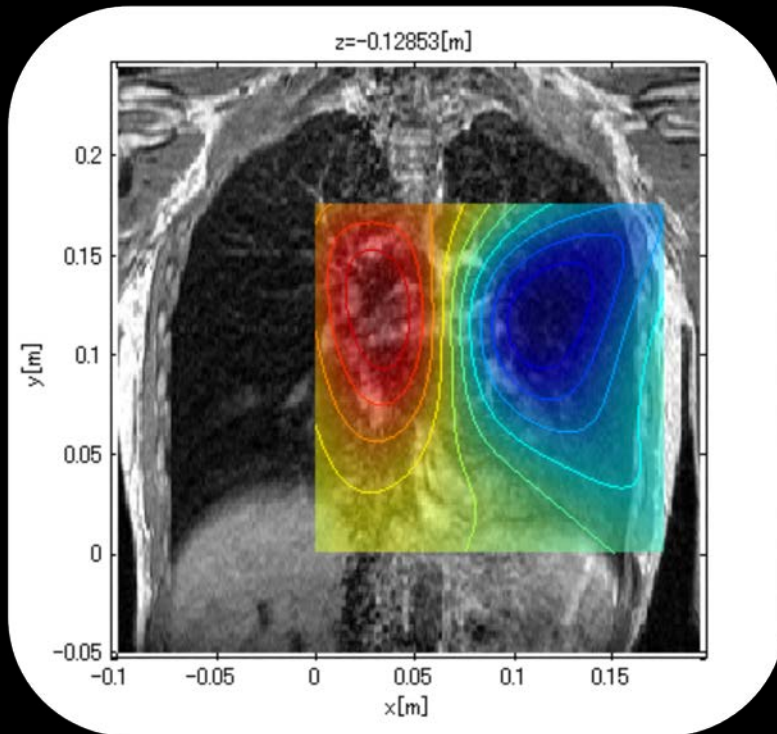
diagonal-RENS

$$\bar{\mathbf{G}} = \int \hat{s}_x(\mathbf{r}, t)^2 \mathbf{l}_x(\mathbf{r})\mathbf{l}_x^T(\mathbf{r}) + \hat{s}_y(\mathbf{r}, t)^2 \mathbf{l}_y(\mathbf{r})\mathbf{l}_y^T(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

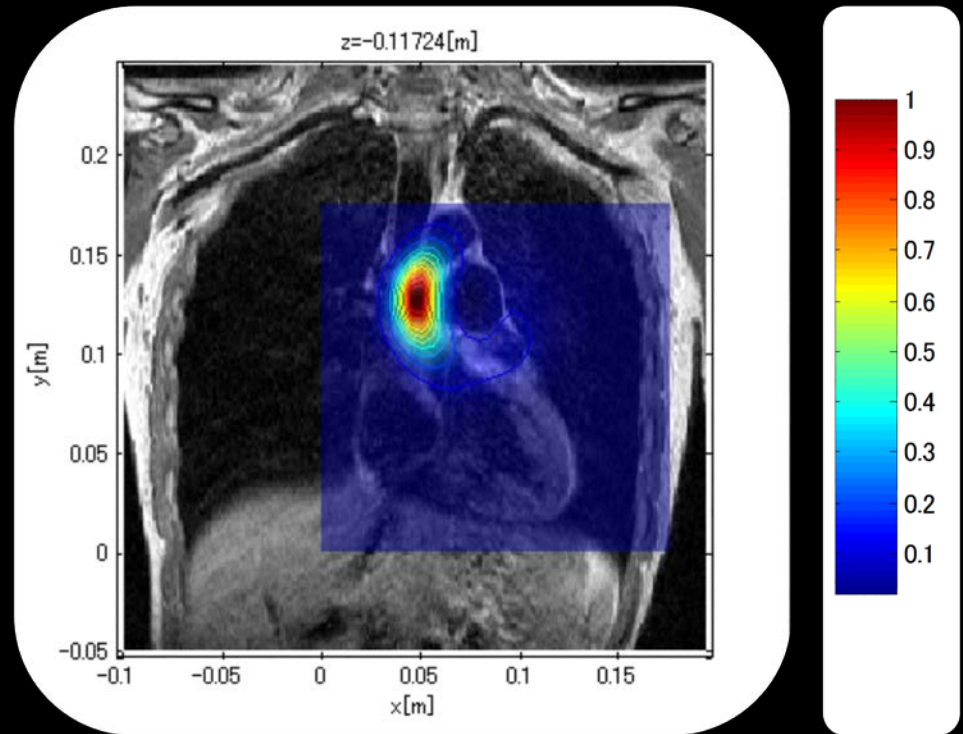
matrix-RENS

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}} = \int & [\hat{s}_x(\mathbf{r}, t)^2 \mathbf{l}_x(\mathbf{r})\mathbf{l}_x^T(\mathbf{r}) + \hat{s}_x(\mathbf{r}, t)\hat{s}_y(\mathbf{r}, t)\mathbf{l}_x(\mathbf{r})\mathbf{l}_y^T(\mathbf{r}) \\ & + \hat{s}_y(\mathbf{r}, t)\hat{s}_x(\mathbf{r}, t)\mathbf{l}_y(\mathbf{r})\mathbf{l}_x^T(\mathbf{r}) + \hat{s}_y(\mathbf{r}, t)^2 \mathbf{l}_y(\mathbf{r})\mathbf{l}_y^T(\mathbf{r})] d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Reconstruction results



sLORETA



Proposed method

An MRI slice containing the maximum source intensity is selected.

sLORETA gives significantly blurred reconstruction. However, the proposed method reconstructs a localized source near the right atrium.