株式会社シグナルアナリシス 関原謙介

行列の特異値分解について
Note on singular value decomposition

2017 年 11 月 11 日改訂版

1 実対称行列の固有値と固有ベクトル

一般に $M \times M$ の正方行列 $\boldsymbol{A}$ において，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j \tag{1}$$

を満たす M 個の列ベクトル $\boldsymbol{u}_j$ と定数 λ_j（$j = 1, \ldots, M$）が存在するとき，λ_j を固有値，$\boldsymbol{u}_j$ を固有ベクトルと呼ぶ．ここで，$\boldsymbol{A}$ を実対称行列とする．すなわち，$\boldsymbol{A}$ の全ての要素が実数で $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ が成り立つ．実対称行列では固有値と固有ベクトルは必ず存在し，以下の性質がある．

1. 固有値は必ず実数となる．証明は以下の通りである．上付きの $*$ を複素共役を表すものとして，式 (1) において両辺に左から $\boldsymbol{u}_j^{T*}$ を乗じれば，

$$\boldsymbol{u}_j^{T*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j^{T*}\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \|\boldsymbol{u}_j\|^2 \tag{2}$$

を得る．一方，式 (1) においての転置と複素共役を取れば，

$$\boldsymbol{u}_j^{T*}\boldsymbol{A}^{T*} = \lambda_j^* \boldsymbol{u}_j^{T*}$$

であり，さらに，上式に右から $\boldsymbol{u}_j$ を乗じれば，

$$\boldsymbol{u}_j^{T*}\boldsymbol{A}^{T*}\boldsymbol{u}_j = \lambda_j^* \boldsymbol{u}_j^{T*}\boldsymbol{u}_j = \lambda_j^* \|\boldsymbol{u}_j\|^2$$

ここで，実対称行列であれば $\boldsymbol{A}^{T*} = \boldsymbol{A}$ が成り立つので，

$$\boldsymbol{u}_j^{T*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_j = \lambda_j^* \boldsymbol{u}_j^{T*}\boldsymbol{u}_j = \lambda_j^* \|\boldsymbol{u}_j\|^2 \tag{3}$$

である，式 (2) と式 (3) の左辺は全く同じであるので，

$$\lambda_j \|\boldsymbol{u}_j\|^2 = \lambda_j^* \|\boldsymbol{u}_j\|^2$$

すなわち，

$$\lambda_j = \lambda_j^* \tag{4}$$

が成立する．式 (4) は固有値 λ_j が実数であることを示している[1]．

2. 実対称行列であれば固有ベクトルも実数である．固有値 λ が与えられたとして，固有ベクトル $\boldsymbol{u} = [u_1, \ldots, u_M]^T$ の要素 $u_1, \ldots, u_M$ は M 行 M 列の線型方程式：

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = 0 \tag{5}$$

を解いて求める．この線型方程式は係数が全て実数であるので，得られる解（すなわち固有ベクトルの要素 $u_1, \ldots, u_M$）も実数であり，したがって固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ も実数となる[2]．

[1]実際，ここの部分の証明は行列 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A}^{T*} = \boldsymbol{A}$ の性質を有することを用いている．しかし複素数値行列でも $\boldsymbol{A}^{T*} = \boldsymbol{A}$ の性質を有する行列は存在し，この性質を持つ行列はエルミート行列と呼ばれる．したがって，固有値が実数であるのは，実対称行列でなくてもエルミート行列なら成り立つ性質である．

[2]当然ながら複素数のエルミート行列では固有ベクトルは実数とはならない．

3. $M \times N$ の実数行列を $\boldsymbol{F}$ として，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}$ とすれば，行列 $\boldsymbol{F}$ は（実対称行列でありしかも）半正定値行列である．証明は以下の通りである．任意の $M \times 1$ 列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，
$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}) \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0 \tag{6}$$
である．$\boldsymbol{x}$ を固有ベクトル $\boldsymbol{u}_j$ とすれば，
$$\boldsymbol{u}_j^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}) \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}) = \lambda_j^2 \|\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0 \tag{7}$$
したがって，$\lambda_j^2 \geq 0$ が成り立ち，$\boldsymbol{A}$ は半正定値行列である．

4. $M \times M$ の実対称行列を $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}$ すれば，$\boldsymbol{A}$ の固有値は正またはゼロであり，固有ベクトルは実数である.（半正定値行列の性質）

2　行列の特異値分解

2.1　定義と諸性質

$M \times N$ の実数値行列 $\boldsymbol{F}$ に対して，$M \leq N$ の場合，
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_M & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^T \tag{8}$$
を与える $M \times M$ の直交行列 $\boldsymbol{U}$ と $N \times N$ の直交行列 $\boldsymbol{V}$ が必ず存在する．上式を行列 $\boldsymbol{F}$ の特異値分解 (singular-value decomposition) と呼び，略して SVD と呼ばれる．ここで，γ_j を行列 $\boldsymbol{F}$ の特異値，直交行列 $\boldsymbol{U}$ の列ベクトル $\boldsymbol{u}_j$（$j = 1, \ldots, M$）を左特異値ベクトル，$\boldsymbol{V}$ の列ベクトルを $\boldsymbol{v}_j$（$j = 1, \ldots, N$）右特異値ベクトルと呼ぶ．非正方行列 $\boldsymbol{F}$ の次元が $M \geq N$ である場合には，特異値分解は
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_N \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^T \tag{9}$$
となる．式 (8) および式 (9) を満たす直交行列 $\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}$ が必ず存在することの証明は第 2.3 節に述べる．

式 (8) において右辺の行列計算を行うと
$$\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_M] \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_M & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_N^T \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{M} \gamma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T \tag{10}$$

となる．式 (9) においても

$$
\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_M] \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_N \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_N^T \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T \tag{11}
$$

であるので，結局，$R = \min\{M, N\}$ として，

$$
\boldsymbol{F} = \sum_{j=1}^{R} \gamma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T \tag{12}
$$

が成り立つ．行列 $\boldsymbol{F}$ のランクが $\mathcal{R}$:（$\mathcal{R} \leq R$）の場合には，特異値分解は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_M] \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdots & \gamma_{\mathcal{R}} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_N^T \end{bmatrix} \\
&= [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{\mathcal{R}}] \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_{\mathcal{R}}^T \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{\mathcal{R}} \gamma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T
\end{aligned} \tag{13}
$$

となる．

式 (13) から特異値分解は

$$
\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{V}^T \tag{14}
$$

と書くことができる．ここで，

$$
\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{\mathcal{R}}] \tag{15}
$$

$$
\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{\mathcal{R}}] \tag{16}
$$

は直交行列であり，対角行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ は

$$
\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{\mathcal{R}} \end{bmatrix}
$$

である．したがって，

$$
\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T = \left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T\right)\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T\right)^T = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}^2\boldsymbol{U}^T \tag{17}
$$

であり，さらに

$$
\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T\right)^T\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T\right) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^2\boldsymbol{V}^T \tag{18}
$$

も成り立つ．式 (17) によれば $\boldsymbol{U}$ は行列 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$ の固有ベクトルから，式 (18) によれば $\boldsymbol{V}$ は行列 $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ の固有ベクトルから求めることができる．また，特異値は $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$ あるいは $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ の固有値の平方根を計算することにより求めることができる．

2.2 よく使う性質 (Rayleigh-Ritz formula の拡張版)

$M \times 1$ の単位ベクトル $\boldsymbol{x}$（$\|\boldsymbol{x}\| = 1$）と $N \times 1$ の単位ベクトル $\boldsymbol{y}$（$\|\boldsymbol{y}\| = 1$）を考えれば，最適化問題

$$\underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}{\operatorname{argmax}}\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} \tag{19}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の最大特異値 γ_1 に対応した特異値ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{v}_1$ であり，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ の最大値は特異値 γ_1 に等しい．さらに，

$$\underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}{\operatorname{argmax}}\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}, \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{u}_1 = 0, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v}_1 = 0 \tag{20}$$

を満たす解は特異値 γ_2 に対応した特異値ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{v}_2$ であり，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ の値は γ_2 となる．全く同様に，

$$\underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmax}}\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}, \text{subject to} \quad \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{u}_1 = 0, \quad \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{u}_2 = 0, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{v}_1 = 0, \quad \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{v}_2 = 0 \tag{21}$$

の解は特異値ベクトル $\boldsymbol{u}_3$ と $\boldsymbol{v}_3$ であり，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ の値は λ_3 となる．4 次以上の特異値，特異値ベクトルについても全く同様の関係が成り立つ．

2.3 特異値分解：式 (8) および式 (9) の成立の証明

ここでは，任意の実数行列 $\boldsymbol{F}$ に対して，式 (8) あるいは式 (9) を満たす直交行列 $\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}$ が必ず存在することを示す．本節の証明は [1] p 400 を参考にした．まず，全ての $j = 1, \ldots, M$ に対して，$\gamma_j > 0$ を仮定する．このとき，$\boldsymbol{F}$ は full-row-rank であると言われる．$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ は実対称行列であり，正定値行列 (positive definite matrix) であるので，この行列は正の固有値を持つ．行列 $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ の固有値の平方根を行列 $\boldsymbol{F}$ の特異値と呼ぶ．$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ の固有ベクトルは実ベクトルであり，$\Re^N$ の正規直交基底をなす．これら固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ を列ベクトルとする $N \times N$ の行列 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_M, \boldsymbol{v}_{M+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_N] \tag{22}$$

とする．行列 $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ はランク M であるので，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_M$ は M 個のノンゼロ固有値に対応した固有ベクトルである．残りの $\boldsymbol{v}_{M+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ はゼロ固有値に対応した固有ベクトルである．すなわち，

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_j = \gamma_j^2 \boldsymbol{v}_j \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, M \tag{23}$$

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_j = 0\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0} \quad \text{for} \quad j = M+1, \ldots, N \tag{24}$$

である．ここで，ベクトル vu_j を，

$$\boldsymbol{u}_j = \frac{1}{\gamma_j}\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_j \tag{25}$$

と定義する．すると，

$$\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{u}_j = \frac{1}{\gamma_i\gamma_j}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_i)^T(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_j) = \frac{1}{\gamma_i\gamma_j}\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_j = \frac{1}{\gamma_i\gamma_j}\boldsymbol{v}_i^T\gamma_j^2\boldsymbol{v}_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_i}\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v}_j = \delta_{i,j} \tag{26}$$

であり，ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_M$ も正規直交系をなす．この $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_M$ を列ベクトルとして持つ行列 $\boldsymbol{U}$ を

$$\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_M] \tag{27}$$

と定義する．式 (22) の $\boldsymbol{V}$ と上式の $\boldsymbol{U}$ を用いて,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} = \\
&\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{F}[\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_M,\boldsymbol{v}_{M+1},\ldots,\boldsymbol{v}_N] = \boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_M,\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_{M+1},\ldots,\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_N] = \\
&\boldsymbol{U}^T[\gamma_1\boldsymbol{u}_1,\ldots,\gamma_M\boldsymbol{u}_M,\boldsymbol{0},\ldots,\boldsymbol{0}] = \\
&[\gamma_1\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{u}_1,\ldots,\gamma_M\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{u}_M,\boldsymbol{0},\ldots,\boldsymbol{0}] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_M & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{28}
$$

を得，したがって，特異値分解の式 (8) をを得る．

次に式 (9) に示す $M \geq N$ の場合を証明する．ここで，全ての $j = 1,\ldots,N$ に対して，$\gamma_j > 0$ を仮定する．この場合は full-column-rank とよばれ，$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ の固有値はすべて正の値を持つ．$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_N$ を列ベクトルとする $N \times N$ の行列 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_N] \tag{29}$$

と定義する．式 (25) を用いて $\boldsymbol{u}_j$ を定義すれば,

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{u}_j = \frac{1}{\gamma_j}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F})\boldsymbol{v}_j = \frac{1}{\gamma_j}\boldsymbol{F}(\gamma_j^2\boldsymbol{v}_j) = \gamma_j\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_j = \gamma_j^2\boldsymbol{u}_j \tag{30}$$

であるので，$\boldsymbol{u}_j$（$j = 1,\ldots,N$）は $M \times M$ の行列 $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ の非ゼロ固有値に対応した固有ベクトルである．行列 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$ の固有値ゼロに対応した固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_{N+1},\ldots,\boldsymbol{u}_M$ とすれば，ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{u}_{N+1},\ldots,\boldsymbol{u}_M$ は正規直交系をなす．これら固有ベクトルを列にもつ行列行列 $\boldsymbol{U}$ を

$$\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{u}_{N+1},\ldots,\boldsymbol{u}_M] \tag{31}$$

と定義する．式 (29) の $\boldsymbol{V}$ と，式 (31) の $\boldsymbol{U}$ を用いれば,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} = \\
&\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{F}[\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_N] = \boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_N] = \\
&\boldsymbol{U}^T[\gamma_1\boldsymbol{u}_1,\ldots,\gamma_N\boldsymbol{u}_N] = \\
&[\gamma_1\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{u}_1,\ldots,\gamma_N\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{u}_N] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_N \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{32}
$$

References

[1] J. L. Goldberg, *Matrix Theory with Applications.* New York, NY: McGraw-Hill, Inc., 1991.

[2] I. C. Ipsen, *Numerical matrix analysis: Linear systems and least squares.* SIAM, 2009.