シグナルアナリシス社技術資料

Signal space projection algorithm

解説

株式会社　シグナルアナリシス

関原　謙介

Signal space projection algorithm

妨害信号と関心信号の空間的特性の違いを利用

エレクタ-Neuromagが1990年代半ばに，Neuromag-MEG装置のmagnetometerセンサーのノイズを取るために用いた方法.

データモデル　$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_S(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$

計測データからどうやって信号とノイズを分離するか？

信号ベクトル：　$\boldsymbol{y}_S(t) = \sum_{q=1}^{Q} s_q(t)\boldsymbol{l}_q$

は時刻t に応じていろいろな値を取るが，M 次元空間の中である決まった領域を占める.

この領域を信号部分空間と呼び，$span\{\boldsymbol{l}_1,\ldots,\boldsymbol{l}_Q\}$ で表される.

$\boldsymbol{l}_1,\ldots,\boldsymbol{l}_Q$ の線形和で表される全てのベクトルのなす集合の意味である

リードフィールドベクトル $\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_Q$ は線形独立であるので，

信号部分空間はQ 次元である.

もし，信号部分空間の（正規直交）基底ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_Q$ が分かれば，

$\boldsymbol{y}_S(t) = \sum_{q=1}^{Q} c_q \boldsymbol{u}_q$ と表すことができる.

プロジェクター $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_Q][\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_Q]^T$ により，

$\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}_S(t) = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_Q][\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_Q]^T \sum_{q=1}^{Q} c_q \boldsymbol{u}_q = \sum_{q=1}^{Q} c_q \boldsymbol{u}_q = \boldsymbol{y}_S(t)$ であるので，

$\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}_S(t) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y}_S(t) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}$ となり，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}$ はノイズベクトルの信号部分空間内の成分で，通常，非常に小さいため，計測データからノイズ除去を行うことができる.

ここで問題は，如何にして
信号部分空間の（正規直交）基底ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_Q$ を求めるかである.

リードフィールドベクトル $\boldsymbol{l}_1,\ldots,\boldsymbol{l}_Q$ が既知であれば，これを直交化することにより
$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_Q$ を求めることができる.

⇩

しかし，$\boldsymbol{l}_1,\ldots,\boldsymbol{l}_Q$ は未知量である.

⇩

$\boldsymbol{l}_1,\ldots,\boldsymbol{l}_Q$ を知らずしていかにして信号部分空間を求めるか？

$$\boldsymbol{y}_S(t) = \sum_{q=1}^{Q} s_q(t)\boldsymbol{l}_q$$

種々の時間点での $\boldsymbol{y}_S(t_1),\boldsymbol{y}_S(t_2),\ldots,\boldsymbol{y}_S(t_K)$ はK が十分大きければ

信号部分空間を埋め尽くす．つまり，以下が成立.

信号部分空間$= span\{\boldsymbol{l}_1,\ldots,\boldsymbol{l}_Q\} = span\{\boldsymbol{y}_S(t_1),\ldots,\boldsymbol{y}_S(t_K)\}$

信号部分空間： $span\{\boldsymbol{y}_S(t_1),\ldots,\boldsymbol{y}_S(t_K)\}$ を推定する.

信号行列：$[\boldsymbol{y}_S(t_1),\ldots,\boldsymbol{y}_S(t_K)]$ の特異値展開

$$\left[\boldsymbol{y}_S(t_1),\ldots,\boldsymbol{y}_S(t_K)\right] = \left[\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_Q,\boldsymbol{u}_{Q+1},\ldots\boldsymbol{u}_M\right]\begin{bmatrix} \gamma_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \gamma_Q & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_Q^T \\ \mathbf{v}_{Q+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_M^T \end{bmatrix}$$

$span\{\boldsymbol{y}_S(t_1),\ldots,\boldsymbol{y}_S(t_K)\} = span\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_Q\}$ であり，$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_Q$ が

信号部分空間の正規直交基底である.

しかし，$\boldsymbol{y}_S(t_1),\ldots,\boldsymbol{y}_S(t_K)$ が未知量なため，$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_Q$ も未知量である.

データモデル $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_S(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$

サンプル共分散行列 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_S + \boldsymbol{R}_\varepsilon$

$$\boldsymbol{R}_S = \left[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_Q, \boldsymbol{u}_{Q+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_M\right] \begin{bmatrix} \gamma_1^2 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \gamma_Q^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_Q^T \\ \boldsymbol{u}_{Q+1}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_M^T \end{bmatrix}$$

データサンプル無限大の極限で $\boldsymbol{R}_\varepsilon = \rho^2 \boldsymbol{I}$ であるので，

$$\boldsymbol{R} = \left[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_Q, \boldsymbol{u}_{Q+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_M\right] \begin{bmatrix} \gamma_1^2 + \rho^2 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \gamma_Q^2 + \rho^2 & & & \\ & & & \rho^2 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \rho^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_Q^T \\ \boldsymbol{u}_{Q+1}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_M^T \end{bmatrix}$$

データサンプル数無限大の極限で，データ共分散行列 $\boldsymbol{R}$ の Q 個の最大固有値に対応した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_Q$ は信号部分空間の基底ベクトルに等しい.

データサンプル数有限の場合，データ共分散行列 $\boldsymbol{R}$ の Q 個の最大固有値に対応した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_Q$ は信号部分空間の基底ベクトルの最尤推定解でとなる.

計測データ行列：$\left[\boldsymbol{y}(t_1), \ldots, \boldsymbol{y}(t_K)\right]$ を特異値展開し，Q 個の最大特異値に対応した Q 個の空間特異値ベクトルが信号部分空間の正規直交基底の最尤推定解である.

ただし，Q は未知量であり，通常，特異値（固有値）スペクトルから推定する.

Signal space projection

センサーノイズの除去

計測データ $\quad \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_S(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$

データ行列 $\left[\boldsymbol{y}(t_1), \ldots, \boldsymbol{y}(t_K)\right]$ の特異値展開によりsignal subspace

の基底ベクトルを推定し，プロジェクター$\boldsymbol{P}$ を構成する.

このとき，信号数Q は未知量であり，特異値（固有値）スペクトルのthresholdingにより推定する.

計測データにプロジェクターを乗ずることにより，すなわち，

$\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}_S(t) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y}_S(t) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}$ からノイズ除去を行う.

Signal space projection

妨害信号の除去

データモデル

計測データ $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_S(t) + \boldsymbol{y}_I(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$

妨害磁場データ $\boldsymbol{y}_C(t) = \boldsymbol{y}_I(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$

妨害磁場データ空間（interference subspace)を推定するために妨害磁場のみのデータ $\boldsymbol{y}_C(t)$ を必要とする.

データ行列 $\left[\boldsymbol{y}_C(t_1),\ldots,\boldsymbol{y}_C(t_K)\right]$ の特異値展開によりinterference subspace

の基底ベクトルを推定し，プロジェクター$\boldsymbol{P}$ を構成する.

プロジェクターをデータベクトルに作用させると　$\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}_I(t) = \boldsymbol{y}_I(t)$　であるので

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{y}(t) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{y}_S(t) + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{y}_I(t) = \boldsymbol{y}_S(t) - \underbrace{\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}_S(t)}$$

信号成分の中で妨害磁場
空間に含まれる成分

最後の項 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}_S(t)$ が，どれくらい小さくなるかは，妨害磁場空間と信号磁場空間の空間的な分離の程度による．あまり分離していなければ，この操作により信号も小さくなってしまう．

空間的な分離が大きければ，信号の損失は小さくてすむ．