生体磁場順問題：Sarvas（球モデル）公式の導出

株式会社　シグナルアナリシス　関原謙介

1　起電力と Maxell 方程式の静電場近似

電荷 q の荷電粒子は電場 $\boldsymbol{E}$ の下では $\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}$ なる電磁力を受ける．ここで，起電力が存在する場合，$\boldsymbol{F}$ 以外にもこの起電力に対応した別の力 $\boldsymbol{F}_{ext}$ を受ける．従って，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_E + \boldsymbol{F}_{ext} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_{ext}) \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，$\boldsymbol{E}_{ext}$ は $\boldsymbol{F}_{ext}$ の電場換算値であり，外部起電力 (external electro-motive force) と呼ばれる．さて，電流密度 $\boldsymbol{J}$ は一般的に $\boldsymbol{F}$ に比例する．比例乗数を σ/q とすると式 (1) は

$$\boldsymbol{J} = \frac{\sigma}{q}\boldsymbol{F} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_{ext}) \tag{2}$$

となり，

$$\boldsymbol{J}_{ext} = \sigma\boldsymbol{E}_{ext}$$

とおけば,

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_{ext} \tag{3}$$

を得る．この $\boldsymbol{J}_{ext}$ が，生体活動を反映した生体活動の電流換算値であり，ソース電流と呼ばれる量である．

生体に関する電磁現象は時間的にはほぼ定常現象であると考えることが出来，Maxwell 方程式の静電磁場近似で記述できる．すなわち，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{5}$$

である．磁場順問題とはソースである外部起電力 $\boldsymbol{J}_{ext}$ が与えられた場合に磁場 $\boldsymbol{B}$ を求める問題のことであり，この問題は式 (2)，(4) および (5) を用いて解くことが出来る．式 (5) より total cuurent$\boldsymbol{J}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の間にはよく知られた Biot-Savart の法則

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_G \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} d\boldsymbol{r}' \tag{6}$$

が成立する．

2　無限に広がった一様な導電体の場合

無限に広がった一様な導電率を持ったコンダクターの場合に起電力分布 $\boldsymbol{J}_{ext}(\boldsymbol{r})$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の関係を求める．

まず，任意のスカラー分布 ϕ とベクトル分布 $\boldsymbol{A}$ に対して成り立つ恒等式

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{A}) = \nabla \phi \times \boldsymbol{A} + \phi \nabla \times \boldsymbol{A}$$

において，$\phi = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}$ および $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ とすれば，恒等式：

$$\nabla' \times (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}) = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}\nabla' \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') + (\nabla'|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}) \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \tag{7}$$

が求まる．ここで，∇' は座標 $\boldsymbol{r}'$ に作用する ∇ 演算子を意味する．この恒等式から

$$\int_G \nabla' \times (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}) d\boldsymbol{r}' = \int_G |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}\nabla' \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' + \int_G (\nabla'|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}) \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' \tag{8}$$

を得る．ここで，$\boldsymbol{a}$ を任意の 3 次元ベクトルとして，体積積分を表面積分に変換する恒等式（Gauss の定理）

$$\int_G \nabla \times \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \int_{\text{surface of } G} d\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{a} \tag{9}$$

が成り立つ．これを用いれば式 (8) の右辺第 2 項は

$$\int_G \nabla' \times (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}) d\boldsymbol{r}' = \int_{\text{surface of } G} d\boldsymbol{S} \times (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}) \tag{10}$$

と変形できる．右辺の表面積分は無限遠に広がった導体 G の表面における積分であり，無限遠では $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') = 0$ と仮定できるため，

$$\int_G \nabla' \times (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}) d\boldsymbol{r}' = 0 \tag{11}$$

である．従って，

$$\int_G |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}\nabla' \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' = \int_G \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times (\nabla'|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}) d\boldsymbol{r}' \tag{12}$$

の関係を得る．

式 (12) を用いて Biot-Savart の式 (6) を変形する．以下の関係式

$$\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = \nabla'|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}$$

を考慮すると，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_G \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} d\boldsymbol{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_G \frac{\nabla' \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'} d\boldsymbol{r}' \tag{13}$$

の関係を得ることが出来る．ところで，式 (4) および (3) から

$$\boldsymbol{J} = \quad \boldsymbol{J}_{ext} - \sigma \nabla V \tag{14}$$

を得る．式 (13) に上式を代入して，$\nabla' \times \nabla' V = 0$ であることを考慮すれば，結局，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_G \frac{\nabla' \times \boldsymbol{J}_{ext}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d\boldsymbol{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_G \boldsymbol{J}_{ext}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} d\boldsymbol{r}' \tag{15}$$

を得る．上式は，無限に広がった導電率一様な媒質中では起電力の分布 $\boldsymbol{J}_{ext}(\boldsymbol{r})$ に対して Biot-Savart の式と見かけ上同一な式が成立することを示している．ここで，ある $\boldsymbol{r}_0$ に空間的に局在した起電力分布，いわゆる電流ダイポールが存在する場合，その強度を $\boldsymbol{Q}$ とすると $\boldsymbol{J}_{ext}(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{Q}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)$ を式 (15) 代入して，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{Q} \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{16}$$

を得る．

3　不均一な導電体の場合

次に不均一な導電体中に存在する $\boldsymbol{J}_{ext}$ の作る磁場について考察する．導電体 G が複数の領域 G_j，$(j = 1, \ldots, n)$ に分けられそれぞれの領域内では一定の導電率 σ_j を持つような場合を考える．Biot-Savart の式 (6) にもう 1 度式 (14) を代入すれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_G [\boldsymbol{J}_{ext}(\boldsymbol{r}') - \sigma\nabla' V(\boldsymbol{r}')] \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} d\boldsymbol{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_G \boldsymbol{J}_{ext}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} d\boldsymbol{r}' - \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j \int_{G_j} \nabla' V(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} d\boldsymbol{r}' \end{aligned} \tag{17}$$

ここで，σ_j は領域 G_j における導電率である．上式，右辺第 2 項を変形するためにさらに恒等式

$$\nabla' \times [V(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}] = \nabla' V(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{18}$$

と式 (9) を用いると

$$\begin{aligned}\int_{G_j} \nabla' V(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} d\boldsymbol{r}' &= \int_{G_j} \nabla' \times V(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} d\boldsymbol{r}' \\ = \int_{\text{surface of } G_j} d\boldsymbol{S}_j \times V(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} &= \int_{\text{surface of } G_j} V(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} dS_j \end{aligned} \tag{19}$$

を得る．ここで，$\boldsymbol{S}_j$ は領域 G_j の表面における面素ベクトルであり，$\boldsymbol{n}$ はこの面素の法線ベクトルである．上式を式 (17) に代入して，結局，以下の Geselowitz の式を得る．

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_j - \sigma_j')\int_{\text{surface of } G_j} V(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} dS_j \tag{20}$$

ここで，σ_j' は領域 G_j の外側の導電率である．また，$\boldsymbol{B}_0$ は一様な無限に広がった導体での磁場

$$\boldsymbol{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_G \boldsymbol{J}_{ext}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} d\boldsymbol{r}'$$

である．式 (20) 右辺第 2 項が体積電流 $\nabla V(\boldsymbol{r})$ の磁場への寄与を表す．体積電流は導電体境界のこのような面積分の形で磁場に影響を与える．

4 球対象な導体の外側の磁場

さらに特別な場合として，G_j が原点を中心とした球対象な領域である場合を考える．この場合には，G は原点を中心とした多層の同芯球である．この場合，磁場の動経成分は式 (20) の両辺と動経方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r(=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|)$ との内積を取ることにより求められる．すなわち，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{e}_r-\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_j-\sigma'_j)\int_{\text{surface of }G_j}V(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}')\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\cdot\boldsymbol{e}_r dS_j \tag{21}$$

となる．ここで $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_r$ であることを考慮すれば，上式右辺第 2 項はゼロとなる．従って，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{e}_r \tag{22}$$

を得る．すなわち，磁場の動経成分は体積電流の影響を受けず，$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})$ の動経成分に等しくなる．これは同芯球状導体の大きな特徴である．

次に，G 内部の $\boldsymbol{r}_0$ に大きさ $\boldsymbol{Q}$ の電流ダイポールがある場合の G の外側での磁場 $\boldsymbol{B}$ のクローズドフォームな解を導く．G の外側には電流は存在しないため，$\nabla\times\boldsymbol{B}=0$ である．従って，スカラーポテンシャル U を用いて，

$$\boldsymbol{B}=-\mu_0\nabla U(\boldsymbol{r}) \tag{23}$$

と書くことが出来る．この $U(\boldsymbol{r})$ を求めるため，無限遠からの動経に沿った積分を考える．すなわち

$$U(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\mu_0}\int_0^\infty\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r)\cdot\boldsymbol{e}_r dt \tag{24}$$

である．ここで，式 (16)，すなわち

$$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{Q}\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{25}$$

を代入すれば，($\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ を用いて)

$$U(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{Q}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{e}_r\int_0^\infty\frac{dt}{|\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0|^3}=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{e}_r\int_0^\infty\frac{dt}{|\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{26}$$

を得る．右辺の積分を計算すれば

$$U(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}}{A} \tag{27}$$

を得る．ここで

$$A=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|(|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|+|\boldsymbol{r}|^2-\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r})$$

である．

従って，式 (27) を (23) に代入して，Sarvas の式

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi A^2}(A\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{r}\nabla A) \tag{28}$$

を得る．ここで，

$$\nabla A = \left[\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2}{|\boldsymbol{r}|} + \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} + 2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| + 2|\boldsymbol{r}|\right]\boldsymbol{r} - \left[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| + 2|\boldsymbol{r}| + \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right]\boldsymbol{r}_0 \tag{29}$$

である．複数個のダイポールが作る磁場は単一ダイポールが作る磁場 (28) の重ね合わせで計算できる．

この一様導体球の外側の磁場は以下に述べる重要な性質を持っている．まず，上式は導電体の導電率 σ を含まない．従って，球状導体モデルでは導体の外の磁場は導電率に依存しない．また式 (28) においてダイポール座標 $\boldsymbol{r}_0$ を $\boldsymbol{r}_0 = 0$ とすれば $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$ であるので，原点にあるダイポールは導体球の外側には磁場を作らないことがわかる．さらに，式 (28) において右辺の 2 つの項とも $\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{r}_0$ の項を含んでいる．この項はもしベクトル $\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{r}_0$ が平行ならゼロになる．したがって，$\boldsymbol{Q} \propto \boldsymbol{r}_0$ であるようなダイポール，すなわち動径方向を向いたダイポールに対しては $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$ であることがわかる．この動径方向を向いたダイポールが磁場を作らないことは導体球モデルの大きな特徴である．

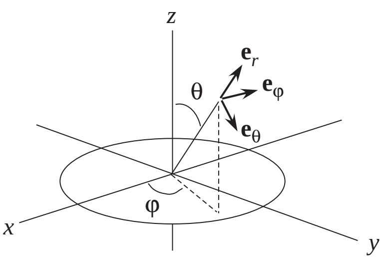

図 1: $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_\theta)$ の方向説明．

このことから反対に，一様導体球の外側の磁場からダイポールの動径成分を決めることはできない．したがって，一様導体球モデルを用いた場合にはダイポールの向きを (x, y, z) 座標で表すのではなく，図 1 に示す $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_\theta)$ で表し，動径成分を無視する，すなわち，$\boldsymbol{e}_\phi$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ の 2 成分のみを用いることが行われる．リードフィールドの成分 $l_m^\phi(\boldsymbol{r})$ を求めるには，まず m 番目のセンサー位置 $\boldsymbol{r}_m$ を，式 (28) において $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_m$，$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{e}_\phi$ と代入することにより $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_m)$ を計算し，

$$l_m^\phi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_m) \cdot \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{sen}}$$

からリードフィールド $l_m^\phi(\boldsymbol{r})$ を求める．リードフィールド $l_m^\theta(\boldsymbol{r})$ も全く同様に計算する．

センサーが軸型の 1 次微分コイルの場合には，ベースラインを D として，リードフィールド $l_m^\phi(\boldsymbol{r})$ は

$$l_m^\phi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_m) \cdot \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{sen}} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_m + D\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{sen}})) \cdot \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{sen}}$$

として計算する．このように計算したリードフィールド $l_m^{\phi}(\boldsymbol{r})$ と $l_m^{\theta}(\boldsymbol{r})$ を用いて，一様導体球モデルのリードフィールド行列 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} l_1^{\phi}(\boldsymbol{r}) & l_1^{\theta}(\boldsymbol{r}) \\ \vdots & \vdots \\ l_M^{\phi}(\boldsymbol{r}) & l_M^{\theta}(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$$

と計算できる．

5　補足：式 (26)，(27) および (28) の導出

式 (26) の導出は以下のように行う．式 (24) に式 (25) を代入すれば，

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{\mu_0}\int_0^{\infty} \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r)\cdot\boldsymbol{e}_r dt = -\frac{1}{\mu_0}\int_0^{\infty}\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{Q}\times\left[\frac{\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0|^3}\right]\boldsymbol{e}_r dt \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{\boldsymbol{Q}\times(\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{e}_r}{|\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0|^3}dt = -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{Q}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{e}_r\int_0^{\infty}\frac{1}{|\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0|^3}dt \end{aligned} \tag{30}$$

と変形できる．上式の分子で t の係数となる項は $(\boldsymbol{Q}\times t\boldsymbol{e}_r)\cdot\boldsymbol{e}_r = 0$ であるのでゼロとなることを用いる．さらに，式 (27) の積分の部分の分母は

$$|\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0|^2 = (\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0) = t^2 + 2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{e}_r t + |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2$$

となるここことを考慮すれば，式 (27) の積分部分は

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{|\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{r}_0|^3}dt = \int_0^{\infty}\frac{dt}{(t^2+[2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{e}_r]\,t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2)^{3/2}}$$

と書くことができる．ここで，不定積分の公式（岩波数学公式 I p125 最終行）

$$\int\frac{dx}{(x^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2(2x+b)}{(4c-b^2)\sqrt{x^2+bx+c}}$$

を用いて，

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{4}{(4c-b^2)} - \frac{2b}{(4c-b^2)\sqrt{c}} = \frac{2}{(2\sqrt{c}+b)\sqrt{c}}$$

を得るので，これに $b = 2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{e}_r$，$c = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2$ を代入し，$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ に注意すればスカラーポテンシャルの式 (27) を得る．

次に，式 (28) を導く．まず，

$$\boldsymbol{B} = -\mu_0\nabla U(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\frac{\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}}{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0}{A} + \boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}\nabla\left(\frac{1}{A}\right)\right] \tag{31}$$

ここで，

$$\nabla\left(\frac{1}{A}\right) = -\frac{\nabla A}{A^2}$$

であることを用いる．さらに，∇A は

$$\begin{aligned}\nabla A &= \nabla|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|(|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|+|\boldsymbol{r}|^2-\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}) \\ &= (\nabla|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|)(|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|+|\boldsymbol{r}|^2-\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r})+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|\big(\nabla(|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|+|\boldsymbol{r}|^2-\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r})\big) \quad (32)\end{aligned}$$

であり，勾配計算に関する公式：

$$\nabla|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} \quad (33)$$

$$\nabla|\boldsymbol{r}| = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \quad (34)$$

$$\nabla|\boldsymbol{r}|^2 = 2\boldsymbol{r} \quad (35)$$

$$\nabla\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \quad (36)$$

を代入すれば，式 (29) を得る．