

Subspaceの考え方を基にした 妨害信号除去

株式会社シグナルアナリシス 関原謙介

妨害信号

磁気シールドルームの外で発生する妨害信号（環境のノイズ）

実験室の電子機器，建てや内のエレベータ，空調設備，外を走る車や電車等が発生する磁場。

磁気シールドルームの中で発生する妨害信号

生体起源の妨害磁場（生理学的ノイズ）：眼球運動や心臓の発生する磁場，（誘発脳活動が測定対象なら）自発的な脳活動による磁場（brain noise）など。

非生体起源の磁場：DBSやVNSなどの脳刺激装置の発生器からの磁場。

妨害信号除去のために知られている技術

環境のノイズ

次のスライドでまとめる

眼球運動や心臓の発生する磁場

ICA SSP DSSP (多分)

ブレインノイズ (臨床応用で問題となるか?)

Prewhitening PFA (ベイズ因子分析を発展させた手法)

脳刺激装置の発生器からの磁場

tSSS DSSP Adaptive beamforming

環境ノイズ除去法のまとめ

別に取りられたノイズデータを必要とする方法

	名称	noise dataの取得法	利点・欠点
ノイズの空間情報を利用	Signal Space Projection(SSP)	empty-room noise data 等を使用	<ul style="list-style-type: none"> ノイズ発生源の空間配置が時間的に変わらないことを仮定. 信号にも影響を与える可能性がある.
ノイズの時間情報を利用	Adaptive noise cancelling (ANC)	リファレンスセンサーデータ	<ul style="list-style-type: none"> 適切に配置されたリファレンスセンサーが必要.
	Common subspace projection (CSP)	リファレンスセンサーデータ	

ノイズデータを必要としない方法

	名称	利点・欠点・特徴など
ノイズの空間情報を利用	Signal Space Separation (SSS)	<ul style="list-style-type: none"> ヘルメット型のMEGセンサーアレイにのみ有効. 高精度なセンサーキャリブレーションが必要. エレクトラから特許出願有り. 信号源に近接した妨害信号源では有効性低下.
ノイズの時間・空間情報を利用	Spatio-temporal SSS (tSSS)	<ul style="list-style-type: none"> ヘルメット型のMEGセンサーアレイにのみ有効. エレクトラから特許出願有り.
	Dual signal subspace projection (DSSP)	<ul style="list-style-type: none"> 任意のセンサーアレイに有効. いくつかの数値パラメータを調節する必要有り. SN比の比較的良好な場合に有効性低下.

Signal space projection algorithm

妨害信号と関心信号の空間的特性の違いを利用

エレクトラ-Neuromagが1990年代半ばに、Neuromag-MEG装置の magnetometerセンサーのノイズを取るために用いた方法.

$$\text{データモデル } \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_S(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

計測データからどうやって信号とノイズを分離するか？

$$\text{信号ベクトル: } \mathbf{y}_S(t) = \sum_{q=1}^Q s_q(t) \mathbf{l}_q$$

は時刻 t に応じていろいろな値を取るが、 M 次元空間の中である決まった領域を占める.

この領域を信号部分空間と呼び、 $\text{span}\{\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_Q\}$ で表される.

$\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_Q$ の線形和で表される全てのベクトルのなす集合の意味である

計測データからどうやって信号とノイズを分離するか？

$$\text{データモデル: } \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_S(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\text{ノイズベクトル: } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{ランダムにいろいろな方向を向く}$$

信号ベクトル:

ソース1個の場合

$$\mathbf{y}_S(t) = s_1(t)\mathbf{l}_1 \quad \leftarrow \text{このベクトルは } \mathbf{l}_1 \text{ 方向をいつも向いている}$$

ソース2個の場合

$$\mathbf{y}_S(t) = s_1(t)\mathbf{l}_1 + s_2(t)\mathbf{l}_2 \quad \leftarrow \text{このベクトルは } \mathbf{l}_1 \text{ と } \mathbf{l}_2 \text{ の線形和で表される方向をいつも向いている}$$

$\text{span}\{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2\}$ と呼ぶ

ソース Q 個の場合

信号ベクトル: $\mathbf{y}_S(t) = \sum_{q=1}^Q s_q(t) \mathbf{l}_q$ は $\text{span}\{\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_Q\}$ で表される領域を占める



この領域を信号部分空間とぶ.

信号部分空間が分かれば, その情報を利用してノイズと信号の分離ができそう?

- 1) どうやって信号部分空間を見つけるか? (信号源の位置と向きは未知であるのに)
- 2) 信号部分空間を見つけられたとして, どうやってノイズと信号の分離を行うのか

リードフィールドベクトル $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_Q$ は線形独立であるので,
信号部分空間は Q 次元である.

どうやってノイズと信号の分離を行うのか

もし、信号部分空間の（正規直交）基底ベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_Q$ が分かれば、

$$\mathbf{y}_S(t) = \sum_{q=1}^Q c_q \mathbf{u}_q \quad \text{と表すことができる.}$$

プロジェクター $\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_Q][\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_Q]^T$ をデータベクトルに乗じて、

$$\mathbf{P}\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}_S(t) + \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y}_S(t) + \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{である.}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{y}_S(t) = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_Q][\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_Q]^T \sum_{q=1}^Q c_q \mathbf{u}_q = \sum_{q=1}^Q c_q \mathbf{u}_q = \mathbf{y}_S(t)$$

$\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}$ ノイズベクトルの信号部分空間内の成分で、非常に小さい

どうやって, 信号部分空間の基底ベクトル u_1, \dots, u_Q を求めるか?

もし, リードフィールドベクトル l_1, \dots, l_Q が分かっているなら,
 l_1, \dots, l_Q を直交化することにより u_1, \dots, u_Q を求めることができる.



しかし, l_1, \dots, l_Q は未知量である.



l_1, \dots, l_Q を知らずしていかにして u_1, \dots, u_Q を求めるか?

l_1, \dots, l_Q を知らずしていかにして u_1, \dots, u_Q を求めるか？

データモデル： $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_S(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$ において：

信号ベクトル $\mathbf{y}_S(t) = \sum_{q=1}^Q s_q(t) \mathbf{l}_q$ の時系列データに注目する。

種々の時間点での $\mathbf{y}_S(t_1), \mathbf{y}_S(t_2), \dots, \mathbf{y}_S(t_K)$ は K が十分大きければ
信号部分空間を埋め尽くす。つまり、以下が成立。

$$\text{信号部分空間} = \text{span}\{\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_Q\} = \text{span}\{\mathbf{y}_S(t_1), \dots, \mathbf{y}_S(t_K)\}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_S(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$$



これのみが知っている量



とは言ってもこれも未知量である。

データサンプル数無限大の極限で、データ共分散行列 \mathbf{R} の Q 個の最大固有値に対応した固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_Q$ は信号部分空間の基底ベクトルに等しい。

データサンプル数有限の場合、データ共分散行列 \mathbf{R} の Q 個の最大固有値に対応した固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_Q$ は信号部分空間の基底ベクトルの最尤推定解となる。

計測データ行列： $[\mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_K)]$ を特異値展開し、 Q 個の最大特異値に対応した Q 個の空間特異値ベクトルが信号部分空間の正規直交基底の最尤推定解である。

ただし、 Q は未知量であり、通常、特異値（固有値）スペクトルから推定する。

Signal space projection

センサーノイズの除去

計測データ

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_S(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

データ行列 $[\mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_K)]$ の特異値展開により signal subspace

の基底ベクトルを推定し, プロジェクター P を構成する.

このとき, 信号数 Q は未知量であり, 特異値 (固有値) スペクトルの thresholding により推定する.

計測データにプロジェクターを乗ずることにより, すなわち,

$$P\mathbf{y}(t) = P\mathbf{y}_S(t) + P\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y}_S(t) + P\boldsymbol{\varepsilon} \text{ からノイズ除去を行う.}$$

Signal space projection

妨害信号の除去

データモデル

$$\text{計測データ} \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_S(t) + \mathbf{y}_I(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\text{妨害磁場データ} \quad \mathbf{y}_C(t) = \mathbf{y}_I(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

妨害磁場データ空間 (interference subspace) を推定するために妨害磁場のみのデータ $\mathbf{y}_C(t)$ を必要とする. empty-room noise data が用いられる.

データ行列 $[\mathbf{y}_C(t_1), \dots, \mathbf{y}_C(t_K)]$ の特異値展開により interference subspace の基底ベクトルを推定し, プロジェクター P を構成する.

プロジェクターをデータベクトルに作用させると $\mathbf{P}\mathbf{y}_I(t) = \mathbf{y}_I(t)$ であるので

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{y}(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{y}_S(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{y}_I(t) = \mathbf{y}_S(t) - \mathbf{P}\mathbf{y}_S(t)$$



信号成分の中で妨害磁場
空間に含まれる成分

最後の項 $\mathbf{P}\mathbf{y}_S(t)$ が、どれくらい小さくなるかは、妨害磁場空間と信号磁場空間の空間的な分離の程度による。あまり分離していなければ、この操作により信号も小さくなってしまう。

空間的な分離が大きければ、信号の損失は小さくてすむ。

信号部分空間を時間領域で定義する

測定が行われた時間点： t_1, \dots, t_K

q 番目のソースのタイムコースを要素とする行ベクトル：

$$\mathbf{s}_q = [s_q(t_1), \dots, s_q(t_K)]$$

$K_S = \text{span}\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_Q\}$ を時間領域の信号部分空間と定義

信号行列： $\mathbf{B}_S = [\mathbf{y}_S(t_1), \dots, \mathbf{y}_S(t_K)]$ 各時間点の信号ベクトルを列として並べて作る行列

空間と時間の信号部分空間に対称な関係がある

Each column of $\mathbf{B}_S \in E_S$

Each row of $\mathbf{B}_S \in K_S$

Column span of $\mathbf{B}_S = E_S$

Row span of $\mathbf{B}_S = K_S$

時間・空間信号部分空間

- 信号部分空間は（従来）信号源リードフィールドベクトルのスパンとして（空間領域で）定義される.
- 時間領域の信号部分空間を信号源のタイムコースを要素とする行ベクトルのスパンで定義する.
- 空間領域の信号部分空間と時間領域の信号部分空間に対照的な関係を見出すことができる.

表記法

行列 X の列空間(column space): $\text{csp}(X)$

行列 X の行空間(row space): $\text{rsp}(X)$

$$\text{csp}(\mathbf{B}_S) = E_S$$

$$\text{rsp}(\mathbf{B}_S) = K_S$$

Signal space projection (SSP)(まとめ)

$$\text{Data model: } \mathbf{B} = \mathbf{B}_S + \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_\varepsilon$$

空間領域SSP

- 別に取りられた妨害磁場データを用いて、妨害磁場部分空間の基底ベクトルを求め、妨害磁場部分へのプロジェクター \mathbf{P}_I を導出.
- 妨害磁場除去はデータを妨害磁場空間の直交方向へ投影: $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_I)\mathbf{B}$ することにより行う.

時間領域 SSP

- 時間領域の妨害信号部分空間へのプロジェクター $\mathbf{\Pi}_I$ が求めれば、妨害信号除去は $\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_I)$ として行う.
- すでに提案されているいろいろな方法がタイムドメインSSPと解釈でき、プロジェクターの求め方がそれぞれの方法の違いとなっている.

いろいろな $\mathbf{\Pi}_I$ の求め方を見ていくと

Adaptive noise cancelling

(計測センサー・リファレンスセンサー 1 個ずつの場合)

2つのセンサーからの出力が以下のモデルに従うと考える

$$\text{計測センサー: } y(t) = s(t) + w(t) \quad s(t) : \text{関心対称の信号}$$

$$\text{参照センサー: } x(t) = aw(t) \quad w(t) : \text{妨害信号}$$

↑
未知のゲイン

a が既知であれば話は簡単, しかし, 未知の場合どうすればよいか?

$y(t)$ を $x(t)$ で回帰する. つまり, $y(t) = \alpha x(t) + v(t)$ として

回帰残差 $v(t)$ が妨害信号除去後の信号である.

ここで, α は $\sum_t (y(t) - \alpha x(t))^2$ を最小にする α として求める.

$\sum_t (y(t) - \alpha x(t))^2$ を最小にする α は $\alpha = \sum_t y(t)x(t) / \sum_t x^2(t)$ として求まり、

妨害信号除去後の信号は以下で求まる：

$$v(t) = y(t) - \frac{\sum_t y(t)x(t)}{\sum_t x^2(t)} x(t)$$

複数個のセンサーの場合

計測センサー： $\mathbf{y}(t)$

参照センサー： $\mathbf{x}(t)$

$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ として、以下で求まる。

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}(t) - \Sigma_{yx} \Sigma_{xx}^{-1} \mathbf{x}(t)$$

ここで $\Sigma_{yx} = \sum_t \mathbf{y}(t)\mathbf{x}^T(t)$, $\Sigma_{xx} = \sum_t \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)$

補足説明： $\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}(t) - \sum_{yx} \sum_{xx}^{-1} \mathbf{x}(t)$ の導出

$\mathbf{y}(t)$ を $\mathbf{x}(t)$ で回帰する： $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ から

$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{A}} \sum_t [\mathbf{y}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)]^2$ より \mathbf{A} の最適推定解を求める.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \sum_t [\mathbf{y}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)]^2 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \sum_t [-\mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x}] \\ &= \sum_t [-2\mathbf{y}\mathbf{x}^T + 2\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = -2\sum_t \mathbf{y}\mathbf{x}^T + 2\mathbf{A}\sum_t \mathbf{x}\mathbf{x}^T = 0 \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_t \mathbf{y}\mathbf{x}^T (\sum_t \mathbf{x}\mathbf{x}^T)^{-1} = \sum_{yx} \sum_{xx}^{-1} \quad \text{を得る.}$$

したがって, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}(t) - \sum_{yx} \sum_{xx}^{-1} \mathbf{x}(t)$ である.

Adaptive noise cancelling (ANC)

(複数センサーの場合)

$$\text{センサーデータ: } \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_S(t) + \mathbf{y}_I(t) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\text{リファレンスデータ } \mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{y}}_I(t) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

信号をリファレンスセンサー データで回帰する: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$

妨害信号除去結果, つまり回帰残差は $\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} \mathbf{x}(t)$

時系列データ行列を導入: $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_K)]$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_K)]$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}(t_1), \dots, \mathbf{v}(t_K)]$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{yx} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}(t_k) \mathbf{x}^T(t_k) = \frac{1}{K} \mathbf{YX}^T, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{xx} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(t_k) \mathbf{x}^T(t_k) = \frac{1}{K} \mathbf{XX}^T$$

Adaptive noise cancelling (ANC)

回帰残差: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}(t) - \sum_{yx} \sum_{xx}^{-1} \mathbf{x}(t)$ は行列で表現すると,

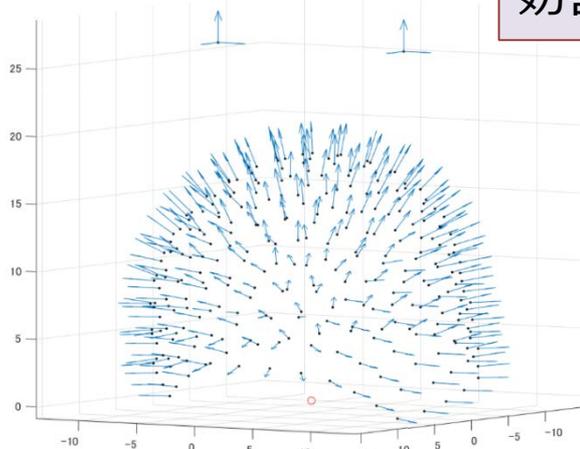
$$\mathbf{V} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X}^T (\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{Y}(\mathbf{I} - \mathbf{X}^T (\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1} \mathbf{X}) \quad \text{と表される}$$



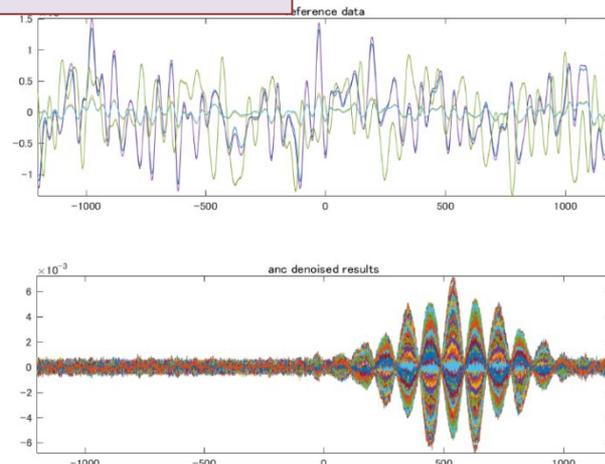
\mathbf{X} の行空間へのプロジェクター

- ANCは計測データをリファレンスセンサーデータ行列の行空間の直交方向に投影する方法である.
- したがって, この行空間が妨害信号部分空間を近似していると考えれば, ANCは時間領域 SSPと解釈できる.
- リファレンスセンサーデータ行列 の行空間は, low-rank signalの仮定のもとで, 高SN比であるなら妨害信号部分空間を近似している.

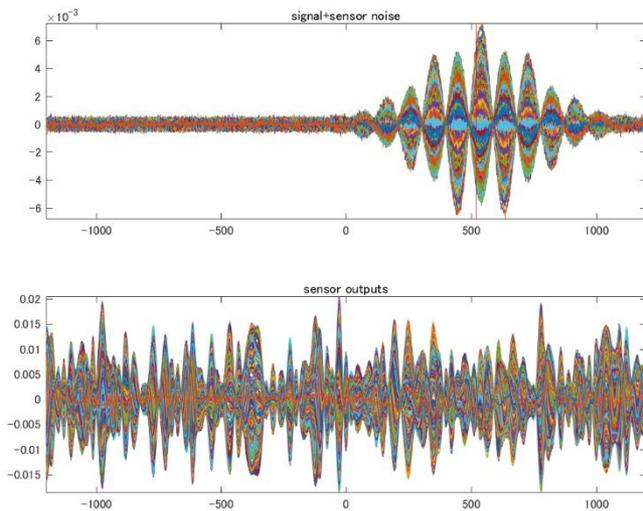
妨害磁場ソース2個による実験



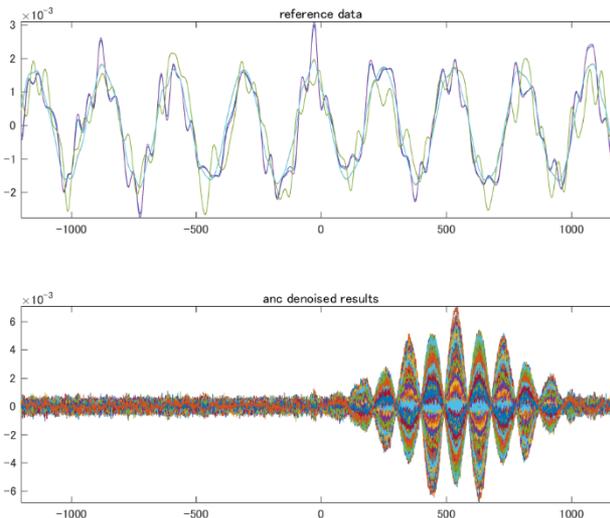
256-channel CTFセンサーアレイと架空のリファレンスセンサー（6チャンネル）



リファレンスセンサーのタイムコース(上段) とANCによる妨害信号除去結果.



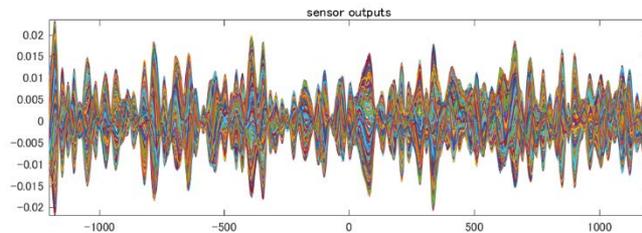
信号磁場センサータイムコース(上段) と妨害磁場の重畳したタイムコース(下段) . 妨害磁場は2個のランダムな活動を仮定.



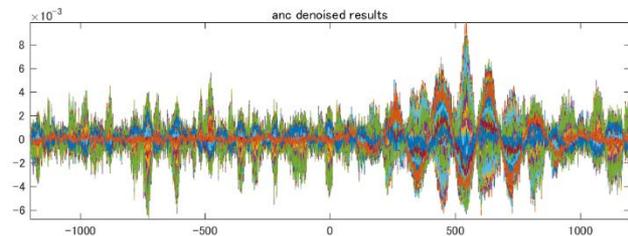
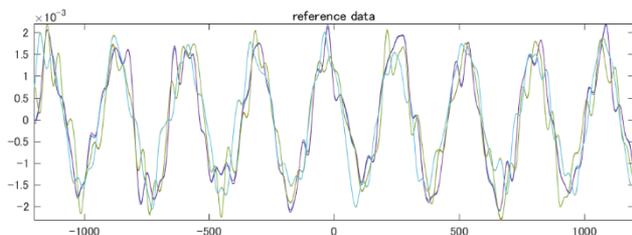
リファレンスセンサーのタイムコースに低周波の周期ノイズを混入.

リファレンスセンサーに混入しているノイズは結果に影響しない.

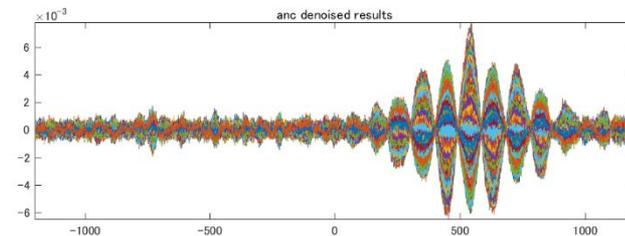
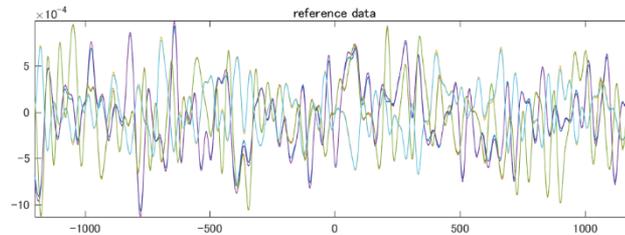
妨害磁場ソース6個による実験



妨害磁場の重畳したタイムコース。妨害磁場は6個のランダムな活動を仮定して発生。



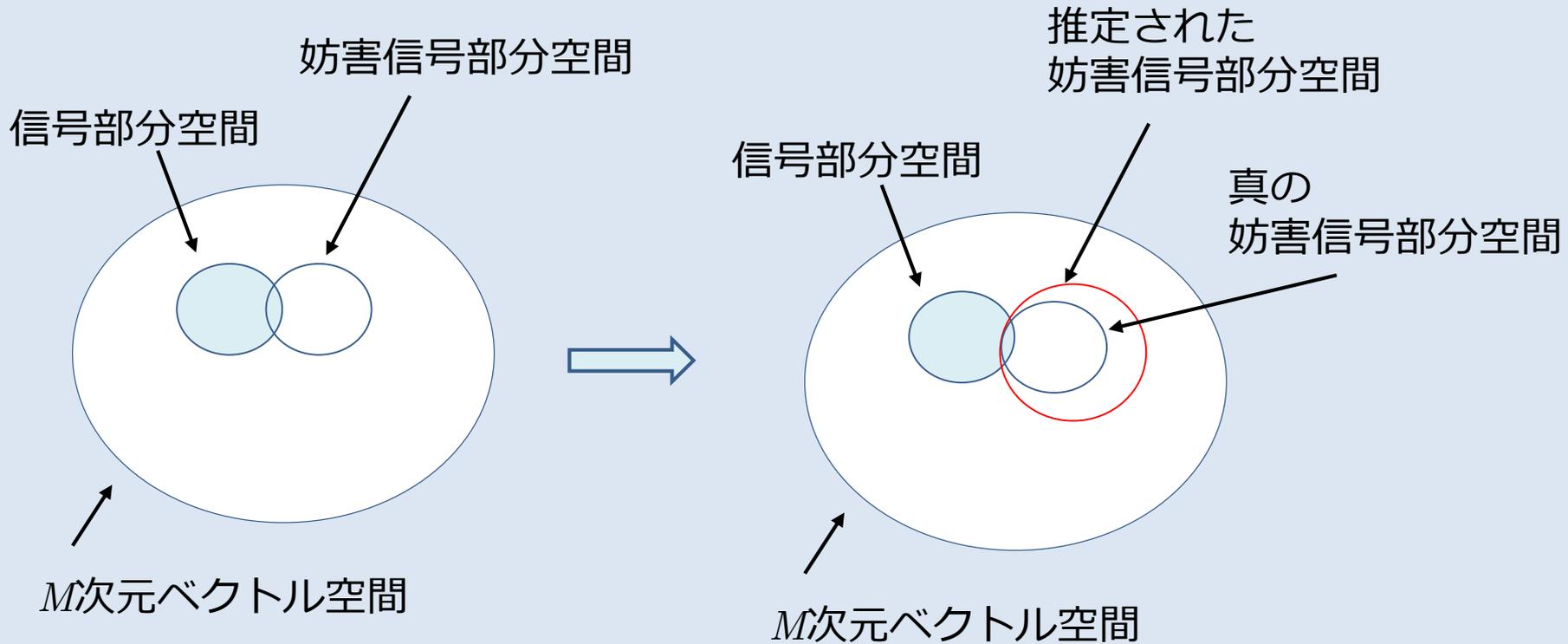
リファレンスセンサーのタイムコース(上段)．リファレンスセンサーのタイムコースに低周波の周期ノイズを混入．ANCによる妨害信号除去結果(下段)



リファレンスセンサーのタイムコース(上段)．リファレンスセンサーのタイムコースに低周波の周期ノイズが混入していない場合．ANCによる妨害信号除去結果(下段)

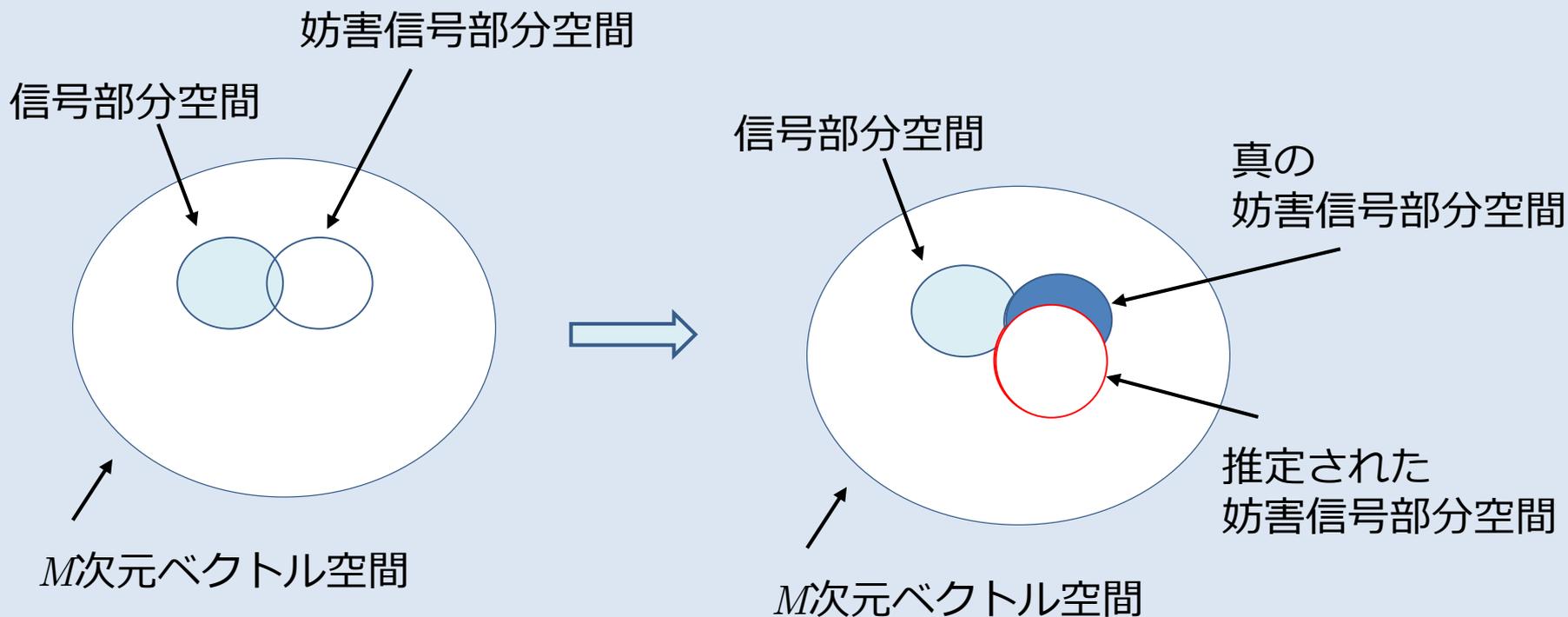
Low-rank信号の仮定が成り立たない場合にはリファレンスセンサーに混入しているノイズがANCの結果に影響する。

シミュレーション結果の解釈



リファレンスセンサー出力に、計測センサー出力には含まれない活動が存在すると妨害信号部分空間は真のものより広く推定される。しかし「推定された妨害信号部分空間」の補空間は十分広いため、「真の妨害信号部分空間」の補空間とさほど変わらずに信号部分空間を含み、妨害信号除去結果はそれほど影響を受けない。

シミュレーション結果の解釈: low-rank signal の仮定が当てはまらない場合



low-rank信号の仮定が当てはまらないと妨害信号部分空間の推定は間違っただものになり、「推定された妨害信号部分空間」の補空間は真の妨害信号部分空間を含むため、ANCを用いても妨害信号は取りきれない。

Common temporal mode subspace projection (CtSP)

Data model

$$\begin{aligned} \text{Sensor data :} \quad & \mathbf{B} = \mathbf{B}_S + \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_\varepsilon \\ \text{Reference sensor data :} \quad & \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}_I + \tilde{\mathbf{B}}_w + \tilde{\mathbf{B}}_\varepsilon \end{aligned}$$

これらデータから（時間領域）妨害信号部分空間 $K_I = \text{rsp}(\mathbf{B}_I)$ を推定する。

センサーノイズ項を無視して,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_S + \mathbf{B}_I \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \tilde{\mathbf{B}}_I + \tilde{\mathbf{B}}_w \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{rsp}(\mathbf{B}) &\subset \text{rsp}(\mathbf{B}_S) + \text{rsp}(\mathbf{B}_I) = K_S + K_I \\ \text{rsp}(\tilde{\mathbf{B}}) &\subset \text{rsp}(\tilde{\mathbf{B}}_I) + \text{rsp}(\tilde{\mathbf{B}}_w) = K_I + K_w \end{aligned}$$

Common temporal mode subspace projection (CtSP)

若干長い導出の後： $K_I \supset \text{rsp}(\mathbf{B}) \cap \text{rsp}(\tilde{\mathbf{B}})$ を得る.

$\text{rsp}(\mathbf{B}) \cap \text{rsp}(\tilde{\mathbf{B}})$ の基底ベクトルを求めてプロジェクター $\mathbf{\Pi}_I$ を計算し,
 $\hat{\mathbf{B}}_S = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_I)$ として時間領域SSPを行い, 妨害信号を除去する.

$K_I = \text{rsp}(\mathbf{B}) \cap \text{rsp}(\tilde{\mathbf{B}})$ が成立しないので, 理論的には妨害信号を完璧に除去できるわけではない.

Dual signal subspace projection (DSSP)

$$\text{Data model} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_S + \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_\varepsilon$$

リファレンスセンサーデータを必要としない。なぜなら、計測データ \mathbf{B} から、信号を含まない、リファレンスセンサーデータを作り出す。

どうするか？

信号部分空間へのプロジェクター \mathbf{P}_S が既知なら、 $\mathbf{P}_S \mathbf{B}_S = \mathbf{B}_S$ であるので、

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_S) \mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_S) \mathbf{B}_I + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_S) \mathbf{B}_\varepsilon$$

から、synthetic reference dataを作り出せる。

信号部分空間へのプロジェクターは未知なため、次の疑似信号部分空間プロジェクターを代わりに用いる。

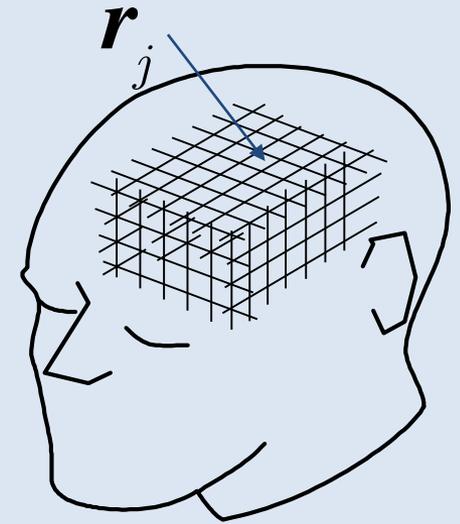
疑似信号部分空間プロジェクター

ボクセルリードフィールド行列

$$\mathbf{L}_V = [\mathbf{L}(r_1), \dots, \mathbf{L}(r_N)]$$

SVD of \mathbf{L}_V

$$\mathbf{L}_V = \mathbf{U}\mathbf{\Gamma}\mathbf{V}^T = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M] \begin{bmatrix} \gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_M \end{bmatrix} \mathbf{V}^T$$



$\gamma_1, \dots, \gamma_\xi$ が他の特異値と比べ有意に大きいとすれば, $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\xi\}$ は近似的に信号部分空間を構成する.

プロジェクター: $\tilde{\mathbf{P}} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\xi][\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\xi]^T$ により, 近似的に,

$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}_S = \mathbf{B}_S$ が成立.

Dual signal subspace projection (DSSP)

$$\text{Data model} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_S + \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_\varepsilon$$

データから（時間領域）妨害信号部分空間 $K_I = \text{rsp}(\mathbf{B}_I)$ を推定する.

データ行列に $\tilde{\mathbf{P}}$ と $\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}}$ を乗じて以下を得る.

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}_S + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}_I + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}_\varepsilon$$

$$(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{B}_I + (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{B}_\varepsilon$$



$$\text{rsp}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}) \subset \text{rsp}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}_S) + \text{rsp}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}_I) + \text{rsp}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}_\varepsilon) = K_S + K_I + K_\varepsilon$$

$$\text{rsp}((\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{B}) \subset \text{rsp}((\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{B}_I) + \text{rsp}((\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{B}_\varepsilon) = K_I + K'_\varepsilon$$

若干長い導出の後 : $K_I \supset \text{rsp}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}) \cap \text{rsp}((\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{B})$ を示すことができる.

Dual signal subspace projection (DSSP)

$\text{rsp}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}) \cap \text{rsp}((\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{B})$ の基底ベクトルを求め、これらから計算したプロジェクターを、妨害信号部分空間へのプロジェクター $\mathbf{\Pi}_I$ として、時間領域SSP $\hat{\mathbf{B}}_S = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_I)$ を実行し、妨害信号を除去する。

$K_I = \text{rsp}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}) \cap \text{rsp}((\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{B})$ が成立しないので、理論的には妨害信号を完璧に除去できるわけではない。

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_S + \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_\varepsilon$ において \mathbf{B}_I が大きく支配的な場合には、

$K_I \approx \text{rsp}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}) \cap \text{rsp}((\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{B})$ が成り立っている（と思われる）。

部分空間 F と G の共通部分 $F \cap G$ の基底ベクトルの求め方

以下に詳細な記載あり

資料：「線形数学の基本事項」の12節
「部分空間の考え方を基にした環境ノイズ除去アルゴリズム」のAppendix B

F と G の大きさ 1 に規格化された要素ベクトルを f_1 と g_1 とする。

subspace angle:

$$\cos(\theta_1) = \max_{f_1 \in F, g_1 \in G} f_1^T g_1$$

$$\cos(\theta_2) = \max_{f_2 \in F, g_2 \in G} f_2^T g_2 \text{ subject to } f_2^T f_1 = 0, \text{ and } g_2^T g_1 = 0$$

として繰り返すことにより,

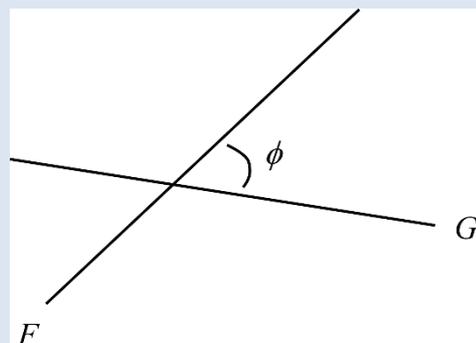
$$\text{principal angle: } \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_\nu$$

$$\text{principal vector: } f_1, f_2, \dots, f_\nu \quad g_1, g_2, \dots, g_\nu$$

が求まる。principal angle は2つの部分空間の「離れ具合」あるいは「一致さ」を表す。 ν は2つの部分空間の小さなほうの次元を表す。

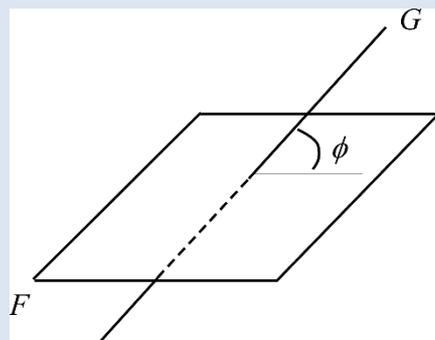
直感的な例

F と G が角度 ϕ で交わる直線



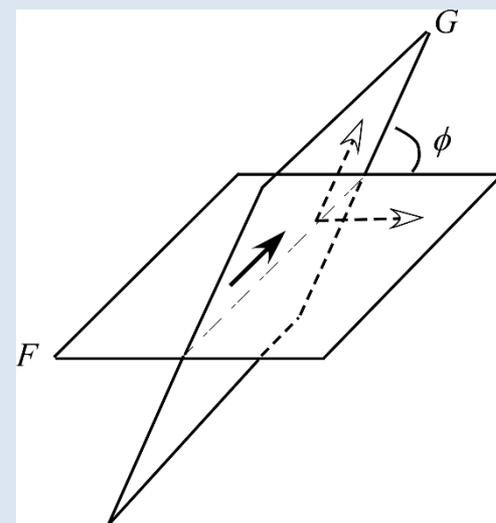
$$\theta_1 = \phi$$

直線と平面



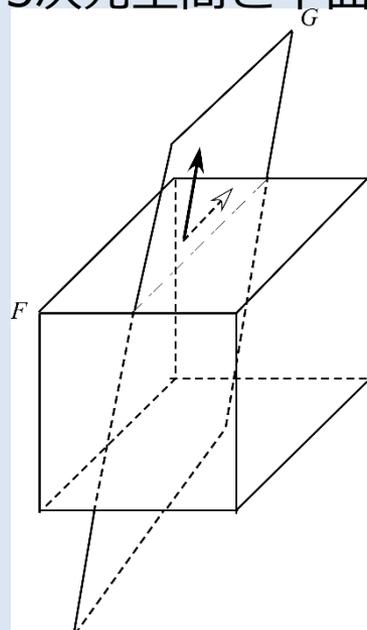
$$\theta_1 = \phi$$

2つの平面



$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \phi$$

3次元空間と平面



$$\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$$

2つの部分空間の共通集合を見つけるにはこれら部分空間のprincipal angleを計算する。

$$\theta_1 = \dots = \theta_r = 0 \leq \theta_{r+1} \leq \dots \leq \theta_v$$

を見出せば共通集合の次元は r であり、その正規直交基底ベクトルは

f_1, f_2, \dots, f_r あるいは g_1, g_2, \dots, g_r で与えられる。

どうやって、共通集合の正規直交基底を求めるか

部分集合 F と G の正規直交基底を $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\nu$ とする.

行列: $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\mu]$ $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\nu]$ とすれば,

F と G の任意の要素ベクトルを \mathbf{f} と \mathbf{g} は以下のように表される.

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{\mu} c_j \mathbf{u}_j = \mathbf{U}\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = [c_1, \dots, c_\mu]^T$$

$$\mathbf{g} = \sum_{j=1}^{\nu} d_j \mathbf{v}_j = \mathbf{V}\mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = [d_1, \dots, d_\nu]^T$$

$$\cos(\theta_1) = \max_{\mathbf{f} \in F, \mathbf{g} \in G} \mathbf{f}^T \mathbf{g} \quad \longrightarrow \quad \cos(\theta_1) = \max_{\mathbf{c}, \mathbf{d}} \mathbf{c}^T [\mathbf{U}^T \mathbf{V}] \mathbf{d}$$

$\max_{\mathbf{c}, \mathbf{d}} \mathbf{c}^T [\mathbf{U}^T \mathbf{V}] \mathbf{d}$ は特異値の性質から、行列 $\mathbf{U}^T \mathbf{V}$ の最大特異値に等しい.

principal vector $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_r$ は、 r 個の最大特異値に対応した特異値ベクトル \mathbf{c}_j ($j = 1, \dots, r$) を用いて $\mathbf{f}_j = \mathbf{U}\mathbf{c}_j$ ($j = 1, \dots, r$) で与えられる.

データ行列 X と Y に対し $\text{rsp}(X)$ と $\text{rsp}(Y)$ の共通集合の基底ベクトルを求める方法

X と Y を特異値分解し、行方向の特異値ベクトルから、行空間の正規直交基底を求める。

$$\text{rsp}(X) = \text{rsp}([\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_\mu^T]^T)$$

$$\text{rsp}(Y) = \text{rsp}([\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_\nu^T]^T)$$

$U = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_\mu^T]$, $V = [\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_\nu^T]$ ($\mu > \nu$) として U と V の列空間の主角度は、

行列： $U^T V$ の特異値で与えられる。特異値が以下の特性：

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_r \approx 1 > \gamma_{r+1} \geq \dots \geq \gamma_\nu$$

を持たば、 $\text{rsp}(X)$ と $\text{rsp}(Y)$ の共通集合の次元を r と決めることができる。

共通集合の基底 ψ_1, \dots, ψ_r は $U^T V$ の特異値ベクトルを u_j, v_j として

$$\psi_k = U u_j \text{ あるいは } \psi_k = V v_j \quad (j = 1, \dots, r) \text{ で与えられる。}$$

Sensor noise suppression (SNS)

Data model

$$\text{Sensor data : } \mathbf{B} = \mathbf{B}_S + \mathbf{B}_\varepsilon$$

SNS法の仮定 :

あるセンサーのタイムコースは他のセンサーのタイムコースの線形和で表される.

データ行列 \mathbf{B} の j 番目の行を β_j と書く.

行列 : $\Theta_j = [\beta_1^T, \dots, \beta_{j-1}^T, \beta_{j+1}^T, \dots, \beta_M^T]$ と定義し,

重みを w_i と書けば,

$$\beta_j^T = \sum_{i \neq j} w_i \beta_i^T = \Theta_j \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = [w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_M]^T$$

である.

重みベクトル \mathbf{w} は最小二乗法から $\mathbf{w} = (\Theta_j^T \Theta_j)^{-1} \Theta_j^T \beta_j^T$

と求まるので, SNS法による j 番目のセンサーのノイズ除去結果は

$$\hat{\beta}_j = \beta_j \Theta_j (\Theta_j^T \Theta_j)^{-1} \Theta_j^T$$

として求まる. つまり, オリジナルタイムコース β_j を $\text{rsp}(\Theta_j)$ に投影することによりノイズ除去を行う.

$$\text{rsp}(\Theta_j) \approx \text{rsp}(\mathbf{B}) \approx \text{rsp}(\mathbf{B}_S) = K_S \quad \text{であるので}$$

↑
SN比の高い場合

SNSアルゴリズムは信号部分空間を $\text{rsp}(\Theta_j)$ で近似した時間領域SSPであると解釈できる.